

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Gentzen, Gerhard: Untersuchungen über das logische Schließen. I. Math. Z. 39, 176—210 (1934).

„Die Formalisierung des logischen Schließens, wie sie insbesondere durch Frege, Russell und Hilbert entwickelt worden ist, entfernt sich ziemlich weit von der Art des Schließens, wie sie in Wirklichkeit bei mathematischen Beweisen geübt wird. Dafür werden beträchtliche formale Vorteile erzielt. Ich wollte nun zunächst einmal einen Formalismus aufstellen, der dem wirklichen Schließen möglichst nahe kommt.“ Einer der wesentlichen Unterschiede, die der vom Autor gegebene Kalkül „des natürlichen Schließens“ gegenüber den bisherigen Formalisierungen der Prädikatenlogik aufweist, ist der, daß irgendein logischer Satz nicht aus vielen „logischen Grundformeln“ mittels einiger weniger Schlußschematen hergeleitet wird, sondern aus Annahmen, die in bestimmter Weise in logischen Schlüssen verarbeitet werden; zu jedem logischen Verknüpfungszeichen ($\&$, \vee , \forall , \exists , \neg , \supset) gibt es einen logischen Schluß, der das Zeichen einführt, und einen (entsprechend gebauten), der es beseitigt. In dieser Formalisierung unterscheidet sich die klassische Prädikatenlogik von der intuitionistischen durch das Hinzutreten des Tertium non datur als einziger Grundformel $\forall \mathcal{A} \neg \mathcal{A}$. — Der Autor bleibt bei diesem wegen seiner Anschmiegung an die Struktur des inhaltlichen Schließens bedeutsamen Kalkül nicht stehen; indem er das Prinzip der zwei Schlußschematen für jede logische Verknüpfung beibehält, das Prinzip der Annahme jedoch formal so modifiziert, daß ein Beweis nicht mehr von Annahmeformeln ausgeht, gelangt er zu einem weiteren Kalkül „L“. Die besagte Modifikation des Annahmepinzips gelingt mit Hilfe des Sequenzbegriffs; die Sequenz $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rightarrow \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ (wofür hier kurz $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{B}_j$ geschrieben sei) bedeutet etwa: Von den Annahmen \mathcal{A}_1 und $\dots \mathcal{A}_m$ hängt \mathcal{B}_1 oder $\dots \mathcal{B}_n$ ab. Für solche Sequenzen werden nun — neben dem einzigen Axiom $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — folgende Schlußschemata aufgestellt: 1. Man darf im Antezedens (\mathcal{A}_i) und ebenso im Sukzedens (\mathcal{B}_j) ein Glied zufügen, zwei Glieder vertauschen, von zwei gleichen Gliedern eines streichen. 2. Der „Schnitt“, der eine Art Verallgemeinerung des üblichen „Schlußschemas“ und des „Kettenschlusses“ darstellt (vgl. auch Gentzen, Math. Ann. 107, 329ff.; dies Zbl. 5, 338):

$$\frac{\mathcal{B}_i \rightarrow \mathcal{C}_j, \mathcal{A} \quad \mathcal{A}, \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{C}_i}{\mathcal{B}_i, \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_i}.$$

3. Für jedes der Verknüpfungszeichen $\&$, \vee , \forall , \exists , \neg ein Schema, welches das Zeichen im Antezedens, und eines, welches es im Sukzedens einführt. Diese Schemata sind paarweise in bestimmtem Sinne dual, z. B. die Schemata

$$\& \text{ im Skz.: } \frac{\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_j, \mathcal{A} \quad \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_j, \mathcal{B}}{\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_j, \mathcal{A} \& \mathcal{B}}, \quad \vee \text{ im Ant.: } \frac{\mathcal{D}_j, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_i \quad \mathcal{D}_j, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_i}{\mathcal{D}_j, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_i}.$$

Auf den ersten Blick erscheint die viel diskutierte formale Zwiespältigkeit des Implizieren in den üblichen logischen Formalismen (Folgtzeichen und Schluß) hier auch auf das Und (Komma im Antezedens und $\&$) und das Oder übertragen; doch findet dies wohl seine Rechtfertigung eben in der Verschiedenheit der Funktion, die Und und Oder im inhaltlichen Schließen einerseits bei Annahmen, andererseits bei Behauptungen ausüben. Es gilt nun der „Hauptsatz“ (für dessen Präzisierbarkeit, wie der Autor hervorhebt, einige Abhängigkeiten im Kalkül L in Kauf genommen worden sind): Aus jedem im Kalkül L geführten Beweis lassen sich alle Schnitte entfernen; man kann zu einem beweisbaren Satz stets durch einen „umweglosen“ Beweis gelangen, in dem alle Formeln Teilformeln der in der Endsequenz

auftretenden Formeln sind. Dieser Hauptsatz wird an Hand einer doppelten finiten Induktion bewiesen. — Wird der Kalkül durch zwei (bei trivialer Interpretation beweisbare) Schlußschematen für \supset ergänzt, so grenzt sich merkwürdigerweise die intuitionistische Prädikatenlogik durch die Bedingung ab, ein Sukzedens dürfe nur ein Glied enthalten. Auch für diesen engeren „intuitionistischen“ Kalkül gilt der Hauptsatz.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Gentzen, Gerhard: Untersuchungen über das logische Schließen. II. Math. Z. 39, 405—431 (1934).

Zunächst gibt der Autor einige Anwendungen des Hauptsatzes (I. Teil der Untersuchungen, Math. Z. 39, 176; vgl. vorst. Referat): einen neuen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der klassischen Prädikatenlogik und ein Entscheidungsverfahren für die intuitionistische Logik (das die — bereits bekannte — Unbeweisbarkeit des Tertium non datur mitliefert). Dann wird die folgende Verschärfung des Hauptsatzes (die eine Verallgemeinerung eines Herbrandschen Satzes darstellt) bewiesen: Enthalten die Formeln einer im „klassischen“ Kalkül L (s. das zit. Ref.) bewiesenen Sequenz Quantoren \forall, \exists nur am Anfang (pränex), so entsteht diese Sequenz durch die bloße Anwendung der vier Schlußschematen für Quantoren aus einer Sequenz, deren Beweis keinen Quantor enthält und keinen Schnitt benutzt. Der so verschärfte Hauptsatz liefert einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die „Arithmetik mit Ausschluß der vollständigen Induktion“, welche durch Hinzunahme einiger Zahlenaxiome zum Kalkül L formalisiert ist. Den Schluß bildet der Beweis der Äquivalenz der Gentzenschen Kalküle, nämlich des klassischen (bzw. intuitionistischen) „natürlichen Kalküls“ und des klassischen (bzw. intuitionistischen) Kalküls L , mit einem Kalkül, welcher dem Hilbertschen (bzw. Heytingschen) Kalkül „im wesentlichen gleich“ ist. *Schmidt* (Göttingen).

Kleene, S. C.: Proof by cases in formal logic. Ann. of Math., II. s. 35, 529—544 (1934).

This paper is based on the system of formal logic proposed by A. Church (Ann. of Math. 1932 and 1933; see this Zbl. 4, 145 and 8, 289). The principal results may be stated as follows. Let M be the function of x such that for any x $M(x)$ is $\Phi(1) \cdot \Phi(2) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$, which is one way of saying that either $x = 1$ or $x = 2$. Let B and C be formulas such that C can be formally derived, by means of a certain portion of the Church formalism above cited, from $B = 1$ and also from $B = 2$; then the author shows that C can be formally derived, in the same sense, from $M(B)$. It follows that an arbitrary formula C , (subject, of course, to certain broad restrictions on the manner of its formation) can be derived in the sense indicated from the formula $1 = 2$. It is anticipated that these results will be used by the author and J. B. Rosser in establishing a remarkable inconsistency of Church's system and of some others related to it. [See Church, this Zbl. 8, 289, and Amer. Math. Monthly 41, 356—361 (1934).]

H. B. Curry (State College, Penna.).

Quine, W. V.: Ontological remarks on the propositional calculus. Mind 43, 472 bis 476 (1934).

The author discusses the merits of so interpreting the calculus of propositions that the entities of that calculus are regarded as sentences, while the operations are regarded as purely semantic. The symbol \vdash is then essential. *H. B. Curry*.

Curry, H. B.: Some properties of equality and implication in combinatory logic. Ann. of Math., II. s. 35, 849—860 (1934).

In Fortsetzung seiner Arbeit „Apparent variables from the standpoint of combinatory logic“ (Ann. of Math., II. s. 34; dies Zbl. 7, 194) fügt der Verf. seiner „kombinatorischen Logik“ (Amer. J. Math. 52, u. a.) einige Axiome über Gleichheit und über die Implikation \supset hinzu (die letzteren entsprechen weitgehend den üblichen aussagenlogischen Implikationsaxiomen). Die wichtigsten Folgerungen werden hergeleitet; insbesondere wird gezeigt, daß sich bei Benutzung der Implikationsaxiome die Beweise gewisser (zum Teil in früheren Arbeiten des Autors aufgestellter) Sätze

mit hypothetischen Voraussetzungen in Beweise entsprechender Implikationsformeln umwandeln lassen.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Quine, W. V.: A method of generating part of arithmetic without use of intuitive logic. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 753—761 (1934).

The author sets up the following formalism. Primitive ideas: variables (denoted by x, y, z , etc.); operation $-$; relation $=$ (which may be replaced by a predicate). Postulates: (A) $x = x - (y - y)$, (B) $x - (y - z) = z - (y - x)$. Rules of procedure: (R) any expression may be substituted for all of the occurrences of any variable (R'). If $\alpha = \beta$, α may be substituted for β anywhere. This formalism is then applicable to the ordinary arithmetic of rational numbers. Conversely if $\alpha = \beta$ is a formula, expressible in the symbols of the above system, which represents an identity when interpreted for rational numbers, then, the author shows, $\alpha = \beta$ is proveable in the system. The author shows further that any identity, valid for all rational numbers, in which the members are obtainable from variables and "0" by the operations of addition, subtraction, and prefixing of rational coefficients, may be regarded as an abbreviation for an identity of the preceding form; hence such identities are abstractly generable from the above system. The interesting point is that no logic whatever, over and above the rules (R) and (R'), is required for the operation of the formalism; so that the system stands on a par, so far as presuppositions are concerned, with the algebra of propositions.

H. B. Curry (State College, Penna.).

Mannoury, Gerrit: Die signifischen Grundlagen der Mathematik. Erkenntnis 4, 288—309 u. 317—345 (1934).

Unter Signifik versteht man die Untersuchung der Bedeutung von menschlichen Sprachakten, d. h. der psychischen Assoziationen, welche den Sprachakten zugrunde liegen, und zwar auf möglichst empirischem Wege. Die Sprachakte der (formalen) Mathematik sind nicht direkt an nichtsprachliche psychische Komplexe, sondern nach von vornherein festgestellten Regeln miteinander verknüpft. Verf. betont, daß es sich hier um einen graduellen Unterschied zwischen mathematischer und nicht-mathematischer Sprache handelt, so daß es eine absolut exakte Mathematik nicht geben kann. Gegenüber Hilbert bemerkt er, daß „von einer axiomatischen Grundlegung eines Wissenschaftszweiges nur dann die Rede sein kann, wenn die Formalisierung der Sprache schon sehr weit vorgerückt ist, und daß daher die signifische Grundlegung einer solchen Lebenserscheinung an die axiomatische vorangehen und darin übergehen soll“. Die signifische Untersuchung ergibt aber, daß die Frage der Widerspruchsfreiheit, wie Hilbert sie stellt, keinen indikativen Sinn hat. Als Ansatz zur signifischen Untersuchung der Mathematik betrachtet Verf. die beiden Assoziationsnetze, welche die meisten Beziehungen zur Mathematik besitzen, nämlich den physischen und den logischen Komplex.

A. Heyting (Enschede).

Juhos, B.: Kritische Bemerkungen zur Wissenschaftstheorie des Physikalismus. Erkenntnis 4, 397—418 (1934).

Algebra und Zahlentheorie.

Dieudonné, J.: Sur un problème de la théorie des polynomes. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 999—1001 (1934).

$P(z)$ bedeutet ein beliebiges Polynom mit der einzigen Bedingung, daß seine Nullstellen alle in der oberen Halbebene ε ($\Im(z) > 0$) liegen. Verf. untersucht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Polynome $A(z)$ und $B(z)$, wenn die Polynome $A(z)P(z) + B(z)P'(z)$ für jedes Polynom $P(z)$ a) alle Nullstellen, b) mindestens eine Nullstelle in der Halbebene ε haben. Aus den Untersuchungen des Verf. folgt der Satz: Ist n der Grad von $P(z)$ und bedeutet $A(z)$ ein beliebiges Polynom vom Grade $m \leq n - 2$, so hat das Polynom $A(z)P(z) + [P'(z)]^2$ mindestens eine Nullstelle in ε .

Sz. Nagy (Szeged).

Krein, M.: Über die Knoten der harmonischen Schwingungen einiger spezieller mechanischer Systeme. Rec. math. Moscou 41, 339—347 u. dtsch. Zusammenfassung 347—348 (1934) [Russisch].

Man kann bei einigen mechanischen Problemen (z. B. bei Betrachtung von Dreh-schwingungen eines Systems von n auf eine Walze aufgesetzten Scheiben) die potentielle bzw. die kinetische Energie folgendermaßen darstellen:

$$2V = a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + \dots + a_n q_n^2 - b_1 q_1 q_2 - b_2 q_2 q_3 - \dots - b_{n-1} q_{n-1} q_n,$$

$$2T = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2.$$

Die Bewegungsgleichungen sind: $q_1'' + a_1 q_1 - b_1 q_2 = 0$, $q_2'' - b_1 q_1 + a_2 q_2 - b_2 q_3 = 0$, ..., $q_n'' - b_{n-1} q_{n-1} + a_n q_n = 0$. Die Amplituden u_1, u_2, \dots, u_n und die Frequenz $\sqrt{\lambda}$ dieser Schwingungen genügen den Gleichungen $(a_1 - \lambda)u_1 - b_1 u_2 = 0$, $-b_1 u_1 + (a_2 - \lambda)u_2 - b_2 u_3 = 0$, ..., $-b_{n-1} u_{n-1} + (a_n - \lambda)u_n = 0$. λ genügt der Gleichung

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda, & -b_1, & 0 \\ -b_1, & a_2 - \lambda, & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -b_{n-1}, & a_n - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Verf. untersucht diese Gleichungen. Die Folge $D_0 = 1, D_1(\lambda), \dots, D_n(\lambda)$ kann wegen der Relationen $D_{k+1}(\lambda) = (a_k - \lambda)D_k(\lambda) - b_{k-1}^2 D_{k-1}(\lambda)$ als eine Sturmsche Folge betrachtet werden, so daß die Wurzeln von $D_k(\lambda) = 0$ reell sind und sich gegenseitig trennen. Dann führt er die „ λ -Linien“ ein, d. h. die Streckenlinien $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$, wobei P_i die Koordinaten $x_i = i$, $y_i = D_i(\lambda)$ hat. Ihre Durchkreuzungen mit der x -Achse nennt er „Knoten der λ -Linie“. Es gilt: 1. Die λ_j -Linie hat $j - 1$ Knoten. 2. Die Knoten von λ_j - und λ_{j+1} -Linien trennen sich gegenseitig. 4. Nimmt λ zu, so verschieben sich die Knoten monoton nach links. 5. Ist $y(x; \lambda)$ die Ordinate der λ -Linie und ist $a < b$, so liegt zwischen zwei Nullstellen von $y(a; \lambda)$ mindestens eine Nullstelle von $y(b; \lambda)$. — Zum Schluß bemerkt der Verf., daß ein Teil dieser Ergebnisse im Buch von Routh „The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies“ enthalten ist, aber seine Methode ist durchaus verschieden. *Tschebotaröv.*

Gilham, C. W.: A note on the complete system of the binary (2, 1, 1) form. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 271—272 (1934).

In einer früheren Arbeit [Proc. London Math. Soc., II. s. 32, 259—272 (1931); dies. Zbl. 1, 387] wurde das volle Kovariantsystem einer Form der Grade 2, 1, 1 in drei unabh. binären Variablen aufgestellt. Jetzt wird gezeigt, daß 4 von den 65 erhaltenen Kovarianten entbehrlich sind. *van der Waerden (Leipzig).*

Hasse, Helmut: Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik p . J. reine angew. Math. 172, 77—85 (1934).

K sei ein elliptischer Funktionenkörper der Primzahlcharakteristik $p \neq 2$, k sein Konstantenkörper. K enthalte Primdivisoren ersten Grades (durch endliche Erweiterung des Konstantenkörpers immer zu erreichen). p -Körper über K heißt jede zyklische unverzweigte Erweiterung p -ten Grades von K . Z heißt unecht, wenn $Z = Kk^*$ mit einer algebraischen Erweiterung k^* von k ist. Das Problem ist die Aufstellung aller p -Körper. Für den Körper K erweist sich in dieser Hinsicht eine gewisse Invariante A , die ein Element von k ist, als charakteristisch. Echte p -Körper über K gibt es dann und nur dann, wenn 1. $A \neq 0$, 2. A eine $(p - 1)$ -te Potenz in k ist. Alle echten p -Körper hängen von einem einzigen und den unechten p -Körpern ab. — Zur Definition von A wird mittels einer Erzeugung von K durch eine Gleichung $y^2 = f(x)$ — wozu ein Primdivisor ersten Grades \mathfrak{D} als Nennerdivisor von x gebraucht wird — das Differential erster Gattung dx/y gebildet. Versucht man, aus der \mathfrak{D} -adischen Entwicklung

$$dx/y = du = \sum_{v=0}^{\infty} c_v t^v, \quad c_0 \neq 0 \text{ von } dx/y \text{ heraus, } dx/y \text{ an der Stelle } \mathfrak{D} \text{ „lokal“ zu inte-}$$

grieren, so versagt der Ansatz $u = \sum c_v \frac{v^{p+1}}{v+1}$, weil die Division durch p nicht geht. Es ist aber eine „Integration“ modulo \mathfrak{O}^{p-1} möglich, d. h. es gibt ein Element u in K mit

$$\frac{1}{y} \frac{dx}{du} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{O}^{p-1}}. \quad u \equiv 0 \pmod{\mathfrak{O}}$$

Dann kann ein k -Element A aus

$$\frac{1}{y} \frac{dx}{du} \equiv 1 + Au^{p-1} \pmod{\mathfrak{O}^p}$$

bestimmt werden; dies A ist die Invariante.

Deuring (Leipzig).

Witt, Ernst: Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz. Math. Z. 39, 462—467 (1934).

Der „Normensatz“ der Zahlentheorie sagt aus, daß eine normale einfache Algebra \mathfrak{A} über einem endlichen algebraischen Zahlkörper k dann und nur dann zerfällt, d. h. volle Matrixalgebra über k wird, wenn für jede Bewertung (Primstelle) \mathfrak{p} von k die \mathfrak{p} -perfekte Erweiterung $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ zerfällt. Es wird gezeigt, daß dies für allgemeinere Grundkörper k nicht mehr richtig zu sein braucht. Ein Gegenbeispiel kann folgendermaßen aufgebaut werden: (a, b) bedeute die zyklische Algebra zweiten Grades $(a, \sqrt[p]{b}, S)$ über dem Körper Ω der rationalen Zahlen. Jetzt sei (a, b) die Algebra mit den vier vorgegebenen Verzweigungsstellen p_1, p_2, p_3, p_4 ; (c, d) die mit den Verzweigungsstellen p_1, p_2 . x sei eine Unbestimmte. Der Funktionenkörper $k = (x, \sqrt[p]{ax^2 + b})$ erweist sich als Nichtzerfällungskörper von (c, d) , aber für jede Primstelle \mathfrak{p} von k (mag sie durch eine rationale Primzahl oder durch einen Primdivisor definiert sein) ist die \mathfrak{p} -perfekte Erweiterung $k_{\mathfrak{p}}$ Zerfällungskörper von (c, d) . Die echte Divisionsalgebra $(c, d)_k$ zerfällt also für jede Primstelle von k . — Für Funktionenkörper k vom Geschlechte Null, deren Konstantenkörper ein Galoisfeld oder ein p -adischer Zahlkörper ist, gilt dagegen der Normensatz, was unter Zuhilfenahme des Tsenschen Satzes bewiesen wird, daß jede Algebra über einem Funktionenkörper vom Geschlechte Null durch eine endliche algebraische Erweiterung des Konstantenkörpers zerfällt werden kann. — Der Normensatz für Zahlkörper kann bekanntlich auch dahin formuliert werden, daß die Diskriminante eines echten Schiefkörpers immer von 1 verschieden ist. Für rationale Quaternionenalgebren wird dies mittels des Minkowskischen Satzes über konvexe Körper in derselben Weise bewiesen, wie Minkowski bewies, daß die Diskriminante jedes Zahlkörpers > 1 ist, der verwendete konvexe Körper ist jedoch die vierdimensionale Kugel. — Für den F. K. Schmidtschen Satz, daß es in jedem Funktionenkörper über einem Galoisfeld Divisoren jeder Ordnung gibt, wird ein rein algebraischer Beweis gegeben (der ursprüngliche Beweis benutzte die Zetafunktion).

Deuring (Leipzig).

Albert, A. Adrian: On normal Kummer fields over a non-modular field. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 885—892 (1934).

F sei ein Körper der Charakteristik 0, ζ eine primitive p -te Einheitswurzel (p Primzahl). $F(\zeta) = K$ habe den Grad n über F . Gefragt wird nach den zyklischen Körpern Z p -ten Grades über K , die galoissch über F sind. Ein solches Z wird durch ein Element y erzeugt, dessen p -te Potenz $y^p = \mu$ in K liegt und durch einen erzeugenden Automorphismus T von K/F in ein Element μ^T übergeführt wird, das sich von einer gewissen Potenz μ^r nur um eine p -te Potenz aus K als Faktor unterscheidet, in Zeichen $\mu^T = \mu^r$. Die galoissche Gruppe von Z/F hat zwei Erzeugende S, T mit den Relationen $T^n = 1, S^p = 1, TS = S^e T$. Ist $\zeta^T = \zeta^e$, so gilt $r \equiv et \pmod{p}$. — Es handelt sich weiter um die Konstruktion aller μ mit $\mu^T = \mu^r$. Es ergibt sich, daß alle solchen μ durch

$$\mu = \prod_{(p)} \lambda^{T^{k-1} [r^1 - k]}, \quad \lambda \text{ aus } K$$

gegeben werden. $[r^1 - k]$ bedeutet einen ganzzahligen Rest von r^{1-k} modulo p . Die μ dieser Form, welche $\equiv 1 \pmod{p}$ sind, definieren also alle über F galoisschen Z , die zyklisch

vom Grade p über K sind. — Alle zyklischen Körper p -ten Grades über F lassen sich jetzt konstruieren als Invariantenkörper von T in den Z , die zu einem mit $r = t$ gebildeten μ gehören, denn genau in diesem Falle ist die Gruppe von Z/F abelsch. — Diese Ergebnisse werden angewendet auf den Beweis des folgenden Satzes: Eine normale Divisionsalgebra D vom Grade p über F ist genau dann zyklisch, wenn sie einen Teilkörper p -ten Grades $F(x)$, $x^p = \gamma$ in F , enthält, also einen reinen Körper vom Grade p .

Ist D zyklisch, gleich (Z, S, γ) , so definiert $F(\sqrt[p]{\gamma})$, wie leicht zu sehen, einen reinen Körper p -ten Grades in D . Zum Beweis der Umkehrung wird zunächst die Algebra D_K gebildet, sie ist zyklisch, denn $K(\sqrt[p]{\gamma})$ ist zyklisch vom Grade p über K ; $D_K = (Z, S, \beta)$, β in K . Es ergibt sich leicht, daß $D_K^\infty \sim (Z, S, \beta^T)$; deshalb wird

$$D_K^{\sum_{k=1}^n [t^1 - k] t^{k-1}} \sim (Z, S, \alpha), \quad \text{wo} \quad \alpha = \prod_{k=1}^n \beta^{[t^1 - k] T^{k-1}}.$$

Da α keine Norm aus Z ist ($D_K^{\sum_{k=1}^n [t^1 - k] t^{k-1}} \sim D_K^n$), so ist $K(\sqrt[p]{\alpha})$ ein Zerfällungskörper von D_K , der einen über F zyklischen Teilkörper enthält: dieser Körper zerfällt offenbar D . — Auf S. 886 fehlt hinter Formel (3): if there exists a quantity ξ of K , such that $\lambda = \mu \xi^p$.

Deuring (Leipzig).

Ostrowski, Alexander: Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. (Die Theorie der Teilbarkeit in allgemeinen Körpern. I—III.) Math. Z. 39, 269—404 (1934).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Theorie der bewerteten Körper, d. h. derjenigen Körper, für deren Elemente a, b, \dots eine nichtnegative reelle Funktion $\|a\|$, der Betrag von a , so definiert ist, daß die Bewertungspostulate gelten. Es ist also 1. $\|0\| = 0$ und $\|a\| > 0$ für $a \neq 0$. 2. $\|ab\| = \|a\| \|b\|$, 3. $\|a + b\| \leq \max[\|a\|, \|b\|]$. Jeder solchen Bewertung des festen Körpers K wird rein formal ein Primdivisor \mathfrak{p} von K zugeordnet. Wie üblich heißt dann ein Körperelement a ganz bezüglich \mathfrak{p} , wenn $\|a\| \leq 1$, und es heißt a teilbar durch \mathfrak{p} , wenn $\|a\| < 1$ ist. — Gegenstand der Arbeit ist die Frage nach den sämtlichen Bewertungen einer beliebigen Erweiterung von K und ihren Eigenschaften. Dabei werden im ersten und zweiten Teil algebraische, im dritten transzendente Erweiterungen betrachtet. — Der erste Teil bestimmt alle möglichen Fortsetzungen einer festen Bewertung von K auf eine beliebige algebraische Erweiterung L . Seine Ergebnisse sind im wesentlichen bekannt. Die Methode ist die von Hensel, d. h. es wird der derivierte Körper \bar{K} von K als wesentliches Hilfsmittel benutzt, wobei jedoch einige Vereinfachungen und Zusätze gegenüber der üblichen Darstellung angegeben werden. — Der zweite Teil geht aus von einer festen Bewertung einer algebraischen Erweiterung L von K und untersucht die durch diese Bewertung induzierten Bewertungen der Zwischenkörper zwischen K und L . Anders ausgedrückt: Ist \mathfrak{P} ein gegebener Primdivisor von L , so werden die Eigenschaften der durch \mathfrak{P} „teilbaren“ Primdivisoren der Zwischenkörper zwischen K und L studiert. In dem Fall, daß L ein endlicher separabler Normalkörper über K ist, haben Krull (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1930) und Deuring [Math. Ann. 105 (1931); dies. Zbl. 3, 2] diese Aufgabe bereits mit gruppentheoretischen Methoden behandelt und damit die Dedekind-Hilbertsche Theorie eines galoisschen Zahlkörpers auf bewertete, separable galoissche Erweiterungen eines beliebigen Körpers K übertragen. Demgegenüber folgt die vorliegende Arbeit auch hier dem Henselschen Vorbild, verfährt also rein körpertheoretisch. Sie braucht daher die algebraische Erweiterung L weder als normal noch als separabel anzunehmen, sondern setzt stattdessen den Grundkörper K als perfekt voraus. Die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse lauten für eine algebraische Erweiterung L von endlichem Grade n über dem perfekten K folgendermaßen: Ist \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{Q} der Restklassenkörper der aus den für \mathfrak{P} ganzen Elementen von K bzw. L bei Betrachtung mod \mathfrak{P} entsteht, so heiße der Grad $(\mathfrak{Q} : \mathfrak{A})$ kurz der Trägheitsgrad von L . Ist m_K bzw. m_L die Multiplikationsgruppe der von 0 verschiedenen Beträge aller Elemente aus K bzw. L , so heiße der Index $j = (m_L : m_K)$ der Verzweigungsindex von L .

Der Quotient $\frac{\text{Körpergrad } n}{\text{Trägheitsgrad } i}$ werde als Verzweigungsgrad v von L , der Quotient $\frac{\text{Verzweigungsgrad } v}{\text{Verzweigungsindex } j}$ als Defekt von L bezeichnet, so daß

$$n = i v, \quad v = j d$$

ist. Dann wird gezeigt: 1. d ist eine ganze Zahl ≥ 1 , und zwar ist d im Falle $d \neq 1$ stets eine Potenz der Charakteristik von \mathfrak{A} . Dieses Ergebnis, der Defektsatz, war bisher unbekannt. 2. Ist \mathfrak{A} separabel über \mathfrak{A} , so gilt der Trägheitssatz, d. h. L enthält einen eindeutig bestimmten Zwischenkörper L_T (Trägheitskörper), dessen Restklassenkörper zu dem vollen Restklassen-

körper \mathfrak{L} kongruentisomorph ist; K/L besitzt also den Trägheitsgrad 1. Ist dagegen \mathfrak{L} inseparabel über \mathfrak{K} , so braucht ein solcher Zwischenkörper L_T nicht zu existieren, worauf bereits in der inzwischen veröffentlichten Arbeit von H. Hasse und Ref. [J. reine angew. Math. **170** (1934); dies. Zbl. **8**, 52] hingewiesen wurde. 3. Enthält L einen Trägheitskörper und ist der Verzweigungsgrad v von L zu der Charakteristik von \mathfrak{K} prim, so gilt der Verzweigungssatz, d. h. es ist der Verzweigungsgrad $v =$ Verzweigungsindex j , also der Defekt $= 1$. Ist dagegen der Verzweigungsgrad durch die Charakteristik von \mathfrak{K} teilbar, so braucht der Defekt nicht $= 1$ zu sein. Für dieses letzte Vorkommnis hat bereits Deuring loc. cit. ein Beispiel angegeben. — Das Schwergewicht der Arbeit liegt im dritten Teil. Er befaßt sich mit der Frage nach allen Fortsetzungen einer festen Bewertung des Grundkörpers K in eine einfach transzendente Erweiterung $K(t)$. Diese Frage wird beantwortet, indem Verf. die Bewertungstheorie durch einen wichtigen neuen Begriff bereichert, den der pseudokonvergente Folge. Eine beliebige Folge

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

aus K heißt dabei pseudokonvergent, wenn die Beträge der Differenzenfolge

$$a_0 - a_1, a_1 - a_2, \dots, a_{n-1} - a_n, \dots$$

Null sind oder monoton abnehmen. Eine solche Folge braucht selbstverständlich nicht konvergent zu sein. Wohl aber besitzt die Folge der zugehörigen Beträge $\|a_n\|$ stets einen Grenzwert, den man als Grenzbetrag der Folge a_n bezeichnet. — Mit Hilfe des Begriffes der pseudokonvergenten Folge löst Verf. das aufgeworfene Problem folgendermaßen: Sei der bewertete Grundkörper K zunächst algebraisch abgeschlossen. Aus K werde eine beliebige pseudokonvergente Folge a_n herausgegriffen, die in K keinen Grenzwert besitzt. Ist dann $r(t)$ eine rationale Funktion aus der einfach transzendenten Erweiterung $K(t)$, so ist die Folge $\|r(a_n)\|$ konvergent, und man erhält eine Fortsetzung der ursprünglichen Bewertung von K auf $K(t)$, indem man für jedes $r(t)$

$$\|r(t)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|r(a_n)\|$$

setzt. Umgekehrt kann man aber auch jede Fortsetzung der Bewertung von K auf $K(t)$ in der angegebenen Weise durch eine geeignete pseudokonvergente Folge a_n aus K erzeugen. Mit Hilfe der pseudokonvergenten Folgen erhält man also wirklich einen vollständigen Überblick über alle Fortsetzungen der Bewertung von K auf $K(t)$, und dieses Resultat läßt sich leicht auch auf den Fall eines nicht algebraisch abgeschlossenen K übertragen. Zugleich führt der Begriff der pseudokonvergenten Folge zu einer einfachen und interessanten Klassifikation der transzendenten Elemente. — Da jeder beliebige Körper aus seinem Primkörper durch Adjunktion transzendenter und algebraischer Elemente erzeugbar ist, kann man auf Grund der geschilderten Ergebnisse offenbar die Gesamtheit aller Bewertungen eines beliebigen Körpers als bekannt ansehen. Diese Tatsache bezeichnet Verf. als Lösung des Strukturproblems für bewertete Körper. Offenbar ist diese Lösung rein genetisch. Es werden die Prozesse angegeben, mit deren Hilfe man schrittweise jede mögliche Bewertung eines Körpers K erhalten kann, falls von vornherein mindestens ein Aufbau von K durch Adjunktion transzendenter und algebraischer Elemente zum Primkörper bekannt ist. Ganz anders dagegen ist die Auffassung, die der von H. Hasse und Ref. loc. cit. entwickelten Lösung des Strukturproblems für diskret bewertete Körper zugrunde liegt. H. Hasse und Ref. schreiben zwei bewerteten Körpern dieselbe Struktur zu, wenn die Körper einen Isomorphismus gestatten, der die Bewertungsbeziehungen erhält. Sie zeigen dann, daß die Struktur eines diskret bewerteten perfekten Körpers im wesentlichen durch eine Invariante, nämlich den Typus des Restklassenkörpers, gekennzeichnet ist, und geben für jede mögliche Struktur ein Konstruktionsverfahren an, welches mit einem Schlage den Körper samt seiner Bewertung liefert. Diese Resultate sind keineswegs in der Ostrowskischen Arbeit enthalten, deren Nachdruck vielmehr gerade auf den nichtdiskreten Bewertungen liegt.

F. K. Schmidt (Jena).

Thébault, V.: Questions d'arithmétique. Mathesis **48**, 377—381 (1934).

Lösung von $x^2 - xy + y^2 - 100x - y = 0$, $1 \leq x < 100$, $0 \leq y < 100$ in ganzen Zahlen.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Duarte, F.-J.: Sur les équations diophantiennes $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$. Enseignement Math. **33**, 78—87 (1934).

Western, A. E.: Note on the magnitude of the difference between successive primes. J. London Math. Soc. **9**, 276—278 (1934).

Let p_n be the n -th prime and denote its difference by $d_n = p_{n+1} - p_n$. The author gives a table of those primes p_n whose difference exceeds the differences of all smaller primes. The table is complete to 10 millions and contains only 20 entries, the largest being 4652353, whose difference is 154. The table supports the conjecture (a consequence of the Riemann hypothesis) that, for n sufficiently large, $d_n < p_n^\theta$

where $\vartheta > \frac{1}{2}$. On the other hand the table would indicate that $d_n > 3(\log_{10} p_n)^2$ for infinitely many values of n .

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Chowla, S.: Congruence properties of partitions. J. London Math. Soc. **9**, 247 (1934).

Ramanujan's researches on the number $p(n)$ of unrestricted partitions of n led him to conjecture the theorem. — Let $\delta = 5^a 7^b 11^c$. If $24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$ then $p(\lambda) \equiv 0 \pmod{\delta}$. This conjecture has been proved for $\delta = 5, 7, 11, 5^2, 7^2, 11^2$ and 5^3 . The purpose of this note is to point out that this conjecture is false since it fails for $\delta = 7^3$. In fact for $\delta = 7^3$ we find $\lambda \equiv 243$ whereas, from a recent table of H. Gupta, $p(243) = 133978259344888 \equiv 245 \pmod{7^3}$.

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Chowla, S.: An extension of Heilbronn's class-number theorem. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **1**, 143–144 (1934).

It is stated that Heilbronn's method (this Zbl. **9**, 296) can be modified to show that the number of classes in a primitive genus tends to infinity as $d \rightarrow -\infty$. Heilbronn's lemma XIV is replaced however by the following: if the number of classes in the principal genus is P , and if $a(>1$ and prime to $2d$) is properly represented by any primitive form of discriminant d , then a^{2P} has at least two sets of representations by some class in the principal genus. A correction: at top of p. 144, replace "exactly" by "at least"; the statement being otherwise false unless a is a prime. *G. Pall*.

Chowla, S.: Heilbronn's class-number theorem. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **1**, 74–76 (1934).

Modifying Heilbronn's methods (this Zbl. **9**, 296), Chowla proves that there are only finitely many negative discriminants in which every primitive class of binary quadratic forms contains a form $[a, 0, c]$.

Remarks: 1. As in the second paper following, the proof of this can be rendered independent of Hecke's work. 2. The proof is easily extended to show that there are only finitely many discriminants in which every class is ambiguous, hence finitely many with one class in every genus.

G. Pall (Montreal).

Chowla, S.: Heilbronn's class-number theorem. II. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **1**, 145–146 (1934).

This renders Heilbronn's proof (this Zbl. **9**, 296) independent of Hecke's earlier work. Merely assume that there are infinitely many negative discriminants d such that $h(d) = H$. Heilbronn's formula (see l. c.)

$$L_0(s) L_2(s) = \zeta(2s) \prod (1 - p^{-2s}) \sum X(a) a^{-s} + o(|s| + 1/|s - 1|) \quad (1)$$

(as $d \rightarrow -\infty$ through fundamental discriminantal values of class-number H) holds for $\frac{1}{2} < s < 1$; the constant implied in o depending only on H and n . If $m = 1$,

$$\zeta(s) L_1(s) = \zeta(2s) \sum a^{-s} + o(|s| + 1/|s - 1|) \quad (2)$$

where $L_1(s) = \sum (d|n) n^{-s}$. Now $\zeta(s)$ is known to be negative for $\frac{3}{4} < s \leq \frac{4}{5}$; the right member of (2) being positive (by Heilbronn's lemma XV) for sufficiently large d , there exists a negative d such that $L_1(s) < 0$ for $\frac{3}{4} < s \leq \frac{4}{5}$. Since $L_1(1) > 0$, $L_1(s)$ vanishes with $1 > s > \frac{3}{4}$. But on the assumption that such a zero exists, (1) provides a contradiction as in Heilbronn's proof.

G. Pall (Montreal).

Bacon, H. M.: An extension of Kronecker's theorem. Ann. of Math., II. s. **35**, 776–786 (1934).

Verf. fragt nach notwendigen und nach hinreichenden Kriterien für ein System reeller Zahlen $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dafür daß bei gegebenem $\varepsilon = \frac{1}{N} > 0$ und für jedes System reeller (μ_1, \dots, μ_n) wenigstens ein ganzes x mit

$$|\alpha_v x - \mu_v| < \varepsilon \pmod{1} \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

zu finden ist. [Nach Kronecker ist hinreichend, daß keine Relation

$$c_0 + \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n = 0, \quad (c_0, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0),$$

mit ganzen rationalen c_0, \dots, c_n besteht; die Frage ist dann aber bei jedem $\varepsilon > 0$ erfüllt.] Verf. zeigt elementar-arithmetisch, daß, falls eine Relation

$$\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n = 0, \quad (c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0) \quad (1)$$

existiert, die Ungleichung $|c_1| + \dots + |c_n| > \frac{1}{2}N$ notwendig ist. Falls (1) die einzige Relation (mit teilerfremden c_1, \dots, c_n) ist, ist die Ungleichung auch hinreichend (das letzte folgt zahlengeometrisch unter Anwendung der Bohrschen Verallgemeinerung des Kroneckerschen Satzes). Falls mehrere unabhängige Relationen (1) bestehen, ist die Frage nach hinreichenden Kriterien schwieriger. Zahlentheoretisch wird aus bekannten Abschätzungen quadratischer Formen folgende hinreichende Bedingung hergeleitet: Für sämtliche der $s < n$ Relationen (1) soll gelten

$$|c_1| + \dots + |c_n| > k_n N,$$

wo

$$k_n = \left(\frac{125}{48}\right)^{\frac{n^3-n}{12}} \cdot n \cdot \sqrt{\frac{n-1}{4}}.$$

J. F. Koksma (Amsterdam).

Mordoukhay-Boltovskoy, D.: Sur les nombres transcendants dont les approximations successives sont définies par des équations algébriques. Rec. math. Moscou 41, 221 bis 232 u. franz. Zusammenfassung 232 (1934) [Russisch].

Verf. betrachtet zunächst Zahlen x , die durch Wurzeln ganzzahliger Gleichungen $b_n^{(j)} y^n + b_{n-1}^{(j)} y^{n-1} + \dots + b_0^{(j)} = 0$ mit unbeschränkt wachsenden $b_n^{(j)}$ approximiert werden, während die Quotienten $\frac{b_k^{(j)}}{b_n^{(j)}}$ beschränkt sind. Ist bei genügend großem m $|y - x| < \frac{1}{(b^{(j)m+1})}$, wobei $b^{(j)} = |b_0^{(j)}| + |b_1^{(j)}| + \dots + |b_n^{(j)}|$ ist, so kann x nicht Wurzel einer Gleichung vom Grade $< m$ sein. Gilt diese Ungleichung bei jedem m , so ist x transzendent. — Dann verallgemeinert der Verf. dieses Ergebnis in verschiedenen Hinsichten: für rationalzahlige Gleichungen, für Gleichungen mit algebraischen Koeffizienten, für den Fall, wo n mit j wächst. Er erhält folgendes hinreichende Kriterium für die Unverträglichkeit zweier rationalzahligen transzendenten Gleichungen $a_0 - a_1 x + a_2 k^2 - \dots = 0$, $b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - \dots = 0$: Sind α_m, β_n die gemeinsamen Nenner von a_0, a_1, \dots, a_m bzw. b_0, b_1, \dots, b_n , $k \geq 1$, hängen M, N, R von m, n nicht ab, ist $T = M^n N^m$ und gelten die Ungleichungen $\sqrt[k]{\frac{R}{|a_{m+1}|}} < \frac{R}{|\alpha_m|^n |\beta_n|^m T}$, $\sqrt[k]{\frac{R}{|b_{n+1}|}} < \frac{R}{|\alpha_m|^n |\beta_n|^m T}$, so haben die Gleichungen keine gemeinsame Nullstelle. — Sehr interessant ist Klassifikation der transzendenten Zahlen, welche vom Verf. vorgelegt wird; er nennt eine Zahl hypertranszendent, wenn sie nicht als $y(c)$ dargestellt werden kann, wobei $y(x)$ eine Lösung einer Differentialgleichung $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ist, deren linke Seite ein rationalzahliges Polynom ist, $y(a) = b, y'(a) = b', \dots, y^{(n-1)}(a) = b^{(n-1)}$, wobei $c, a, b, b', \dots, b^{(n-1)}$ rationale Zahlen sind. Leider ist es dem Verf. nicht gelungen, ein Beispiel einer hypertranszendenten Zahl anzugeben. Tschebotaröw.

Gruppentheorie.

Garver, Raymond: Note concerning group postulates. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 698—701 (1934).

Untersuchung über Abhängigkeit von Gruppenaxiomen, deren Ergebnisse in einer Arbeit von R. Baer und dem Ref. (S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1932, 2. Abh., 3—12; dies. Zbl. 4, 338) bereits mit enthalten sind.

Friedrich Levi (Leipzig).

Brahana, H. R.: On the metabelian groups which contain a given group H as a maximal invariant abelian subgroup. Amer. J. Math. 56, 490—510 (1934).

Die vorliegende Arbeit ist unmittelbare Fortsetzung einer früheren [Amer. J. Math. 56, 53—61 (1934); dies. Zbl. 8, 201] desselben Autors. Für die Bezeichnungen vgl. das zitierte Referat. „Metabelsch“ heißt hier abweichend von der sonst üblichen Verwendung des Wortes eine Gruppe G , deren Faktorgruppe nach dem Zentrum abelsch ist. Ist I_p die p -Sylowgruppe von I und ist G eine metabelsche H enthaltende Untergruppe des Holomorphs von H , so ist G/H eine Untergruppe von I_p , deren zugehörige Zerlegungen von n keinen Summanden $n_i > 2$ enthalten. Tritt für sämt-

liche Elemente von G/H nur ein $n_i = 2$ auf, so ist entweder das Zentrum von G von der Ordnung p^{n-1} oder die Kommutatorgruppe K von G von der Ordnung p . Ist G eine beliebige metabelsche Gruppe der Ordnung p^m , welche H als invariante maximale Abelsche Untergruppe enthält, so lassen sich die möglichen Typen von G näher untersuchen und insbesondere dann völlig aufzählen, wenn G ein Zentrum der Ordnung p^{n-1} und nur Elemente der Ordnung p besitzt. Weiterhin werden sehr ausführlich diejenigen H enthaltenden Untergruppen G des Holomorphs von H untersucht, deren Ordnung p^{n+2} oder p^{n+3} ist; sie werden nach den möglichen Ordnungen von K klassifiziert. Magnus (Princeton).

Lunn, A. C., and J. K. Senior: Note on a unique representation for every solvable group. Amer. J. Math. **56**, 511—512 (1934).

Die Verff. haben früher [Amer. J. Math. **56**, 319—327 (1934); dies. Zbl. **9**, 201 (1934)] gezeigt, daß eine auflösbare Gruppe C genau eine getreue Darstellung als intransitive Permutationsgruppe P des Grades $\sum_{i=1}^n x_i$ (vgl. das zitierte Referat) besitzt.

Hier wird nun insbesondere gezeigt, daß die transitiven Bestandteile der Grade x_i von P die regulären Darstellungen der Sylowgruppen der Ordnung x_i von C enthalten und daß man jede Darstellung von C als transitive Permutationsgruppe, deren Grad teilerfremd zur Ordnung der erzeugenden Untergruppe ist, mit Hilfe von P konstruieren kann; man bilde hierzu zunächst für irgendein $r \leq n$ alle möglichen r -Tupel aus den von P permutierten Symbolen, welche aus irgend r unter P transitiv permutierten Systemen von Symbolen je eines enthalten, und betrachte dann die Permutationsgruppen, die diese r -Tupel erfahren, wenn man die in ihnen enthaltenen Symbole gemäß P permutiert. Der Beweis beruht auf einem für beliebige Gruppen C gültigen Lemma: Hat C die Ordnung klm , wobei je zwei von diesen Zahlen relativ prim sind, und besitzt C Darstellungen durch transitive Permutationsgruppen der Grade k und l in den Symbolen a_1, \dots, a_k und b_1, \dots, b_l , so wird durch diese eine transitive Darstellung in den Symbolen $a_i b_j$ induziert. Magnus (Princeton).

Baer, R.: Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich. Studia Math. **5**, 15—17 (1935).

Verf. gibt zuerst eine Verallgemeinerung des Begriffs der Kompositionsreihe. Eine endliche oder unendliche Menge \mathfrak{M} von Untergruppen einer Gruppe \mathfrak{S} soll eine Jordan-Höldersche Kompositionsreihe heißen, wenn 1. von zwei in \mathfrak{M} enthaltenen Untergruppen stets die eine eine Untergruppe der anderen ist, 2. zu jeder in \mathfrak{M} enthaltenen Untergruppe \mathfrak{K} gibt es in \mathfrak{M} eine solche Untergruppe $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_1$, so daß \mathfrak{K} Normalteiler von \mathfrak{K}_1 ist, und 3. es gibt in \mathfrak{S} keine Untergruppenmenge mit den Eigenschaften 1., 2., die \mathfrak{M} als ihre echte Teilmenge enthält. Genau so kann man eine Hauptreihe und eine charakteristische Reihe in \mathfrak{S} definieren. Verf. verallgemeinert dann die Ergebnisse von J. Schreier und S. Ulam [Studia Math. **4**, 134—141 (1933); dies. Zbl. **8**, 200]. Es sei M eine unendliche Menge der Mächtigkeit \aleph_μ und \mathfrak{S} die Gruppe aller eindeutigen Abbildungen von M auf sich. Die Gesamtheit \mathfrak{S}_ν ($\nu < \mu$) aller Elemente von \mathfrak{S} , die nur Elemente einer Teilmenge von M von der Mächtigkeit $< \aleph_\nu$ vertauschen, ist Normalteiler von \mathfrak{S} . Dabei enthält \mathfrak{S}_0 nur Elemente von \mathfrak{S} , die nur endlich viele Elemente von M vertauschen; \mathfrak{A} ist die Menge aller geraden Permutationen aus \mathfrak{S}_0 . Dann gilt folgender Satz: Die Menge

$$\{1\} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{S}_\nu \subset \dots \subset \mathfrak{S}$$

ist sowohl eine Jordan-Höldersche Kompositionsreihe als auch die einzige Hauptreihe, als auch die einzige charakteristische Reihe von \mathfrak{S} . A. Kurosch (Moskau).

Coxeter, H. S. M.: Finite groups generated by reflections, and their subgroups generated by reflections. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 466—482 (1934).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **10**, 11) wurden alle endlichen und unendlichen Gruppen angegeben, die durch Spiegelungen erzeugt werden. In vorliegender Arbeit

gibt Verf. die durch Spiegelungen erzeugten Untergruppen an. Das Verfahren ist ein geometrisches mittels eines Hilfspolytopes und der früher angegebenen graphischen Darstellung. Die Ergebnisse werden wiederum in übersichtlichen Tabellen geordnet.

J. J. Burckhardt (Zürich).

● **Got, Th.: Domaines fondamentaux des groupes fuchsien et automorphes.** Mém. Sci. math. Fasc. 68, 64 S. (1934).

Kurze Darstellung der wichtigsten Ergebnisse aus der Theorie der diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen. Im ersten Kap. werden die Haupteigenschaften der Normalpolygone (domaine rayonné) der Hauptkreisgruppen zusammengestellt. Das zweite Kap. behandelt die zu einer Kugel gehörigen automorphen Gruppen und ihre Beziehung zu Gruppen ohne Hauptkreis. Im letzten Kap. werden kanonische Bereiche der Hauptkreisgruppen untersucht, ferner wird die Klassifikation der Gruppen nach ihrem Geschlecht erklärt.

Myrberg (Helsinki).

Schröder, Kurt: Einige Sätze aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen linearer Transformationen. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 2, 111 bis 149 (1934).

For continuous groups S. Lie proved that every finite transformation can be generated by iteration of an infinitesimal one. This result is however, of a local nature. For connected group manifolds we can state only that every finite transformation is the product of a finite number of them each of which is generated by an infinitesimal one. What is the least number for which this can be done? The author considers this question for groups of matrices and proves the two following theorems: (I) Every matrix A of a group of orthogonal (unitary) matrices can be represented in the form $A = \exp U$ where U is an infinitesimal matrix of the group. (II) Every matrix A of any group of matrices can be represented in the form $A = \exp U_1 \cdot \exp U_2$ where both U_1 and U_2 belong to the infinitesimal group.

F. Bohnenblust (Princeton, N. J.).

Schwerdtfeger, Hans: Sur une formule de H. Poincaré relative à la théorie des groupes de S. Lie. Enseignement Math. 32, 304—319 (1933).

In a first part of this paper the author develops briefly the theory of functions of matrices, proving in particular the formula which corresponds to Cauchy's integral formula for analytic functions. In a second part he shows that the formula on which Poincaré [Cambr. Phil. Soc. Trans. 18, 220—225 (1900)] based his results on the third fundamental theorem of Lie on continuous groups is essentially this formula of Cauchy. The author discusses then the relations between Poincaré's method and the theory of Cartan and concludes his paper with a brief account of the results of Hausdorff [Leipz. Ber. 58, 19—48 (1906)] on symbolic exponentials.

F. Bohnenblust.

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Novikov, P.: Généralisation du deuxième principe de séparabilité. C. R. Acad. Sci. URSS 4, 8—11 u. franz. Zusammenfassung 11 (1934) [Russisch].

Einführung und Beweis des vervielfachten zweiten Lusinschen Separationsprinzips für analytische Mengen. So nennt Verf. folgenden Satz, der sich bei N. Lusin (Leçons sur les ensembles analytiques, S. 210. Paris 1930) bloß auf zwei Mengen A_1 und A_2 bezog: Zu jeder Folge $\{A_n\}$ analytischer (linearer) Mengen gibt es eine Folge

$\{K_n\}$ von Komplementärmengen analytischer Mengen derart, daß $A_n - \prod_{n=1}^{\infty} A_n \subset K_n$ und $\prod_{n=1}^{\infty} K_n = 0$ ist. Als Hilfssatz wird ein im wesentlichen in der Arbeit von W. Sierpiński

[Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points. Mathematica (Cluj) 5, 55 (1931); vgl. dies. Zbl. 3, 153, 11. Zeile der Tabelle] enthaltenes Ergebnis selbstständig hergeleitet und verwendet.

B. Knaster (Warszawa).

Keldyeh, Ludmila: Sur l'homéomorphie des éléments canoniques de classe 3. Rec. math. Moscou 41, 187—203 u. franz. Text 203—220 (1934) [Russisch].

In den Klassen K_0, K_1, K_2 und K_3 der Baire-de la Vallée Poussinschen Klassifikation (Übergang zu höheren Klassen durch Mengengesamtheit) von Borelschen Mengen im Raume J der irrationalen Zahlen unterscheidet N. Lusin (Leçons sur les ensembles analytiques. Paris 1930. II. Kapitel) gewisse Teilklassen, deren Elemente durch bloße abzählbare Summierung alle Elemente der ganzen Klasse ergeben und dabei selbst als Durchschnittsmengen von abzählbar vielen Elementen niedrigerer Klassen erhältlich sind. Unter solchen Teilklassen zeichnen sich nach N. Lusin durch konstruktive Definierbarkeit ihrer Elemente die folgenden Teilklassen C_i von K_i ($i = 0, 1, 2, 3$) aus: C_0 = Klasse aller Durchschnittsmengen von J mit rational endpunktigen linearen Strecken, C_1 = Klasse nirgendsdichter, in J perfekter (darunter einpunktiger) Mengen; C_2 = Klasse aller Mengen von der Gestalt $P - \sum_{j=1}^{\infty} P_j$, wo die Mengen P und P_j in J perfekt, P_j in P nirgendsdicht und zueinander punktfremd sind, während $\sum_{j=1}^{\infty} P_j$ in P dicht liegt; C_3 = Klasse aller Mengen von der Gestalt $\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \dots \sum_{n_k=1}^{\infty} P_{n_1 n_2 \dots n_k}$, wo die (stets zueinander punktfremden) Mengen $P_{n_1 n_2 \dots n_k}$ zu $P_{n_1 n_2 \dots n_k}$ in derselben Beziehung stehen wie P_j zu P . Nun beweist Verf. zunächst, daß durch abzählbare Summierung der Elemente von C_3 (von N. Lusin „Bairesche Elemente“ genannt) tatsächlich alle zu K_3 gehörenden Mengen entstehen, was bis jetzt nur für C_i hinsichtlich K_i mit $i < 3$ feststand. Jede Menge aus K_3 besteht nämlich aus einer zu C_3 und höchstens abzählbar vielen zu C_2 gehörenden Mengen. Ferner sind bekanntlich sämtliche mehrpunktige Mengen einer und derselben Klasse C_i bei $i < 3$, abgesehen von höchstens abzählbaren Teilmengen, untereinander homöomorph. Dasselbe wird nun von Verf. für C_3 hergeleitet und zum Schluß, umgekehrt, die Invarianz der Angehörigkeit zu C_3 gegenüber Homöomorphie bewiesen. *Knaster.*

Sierpiński, W.: Les superpositions transfinies des fonctions continues et les fonctions de Baire. Fundam. Math. 24, 1—7 (1934).

L'auteur démontre le théorème suivant. La famille de toutes les fonctions de Baire coïncide avec la plus petite famille F de fonctions satisfaisant aux conditions: 1° F contient toutes les fonctions continues, 2° si $\{f_n(x)\}$ est une suite de fonctions appartenant à F et telles que la limite $f(x) = \lim_n f_1 f_2 \dots f_n(x)$ existe, alors la fonction $f(x)$ appartient aussi à F . En particulier, les fonctions de classe ≤ 1 de Baire coïncident avec celles de la forme $f(x) = \lim_n f_1 f_2 \dots f_n(x)$ où $\{f_n(x)\}$ est une suite de fonctions continues. Dans ces énoncés, fonctions continues peuvent être remplacées par fonctions qui sont à la fois continues et à variation bornée. *Saks (Warszawa).*

Sierpiński, W.: Un théorème de la théorie générale des ensembles et ses conséquences. Fundam. Math. 24, 8—11 (1934).

If E is an arbitrary infinite set of power m and Φ a family of power m of subsets of E of power m , the set E contains m disjoint sets of power $< m$ such that the sum of every infinity of power m among them has at least one element in common with every set of the family Φ . The word "contains" can be replaced by "is a sum of". There is a decomposition of the interval $J = [0 \leq x \leq 1]$ in $c = 2^{\aleph_0}$ disjoint sets of power $< c$ such that the sum of every infinity of these sets of power c has at least one point in common with every perfect set contained in J . Hence the hypothesis of the continuum, $c = \aleph_1$, is equivalent D : the interval J is a sum of enumerable disjoint sets such that the sum of every non-enumerable infinity of them has at least one point in common with every perfect subset of J . Under the hypothesis of the

continuum the following problem of S. Ruziewicz is resolved in the negative. If J is decomposed into a family F of disjoint sets of measure null, is there a part F_1 of F such that the sum of all the sets of F_1 is of any given positive measure less than one? If $c = \aleph_1$, there is a decomposition of J in 2^c sets such that each pair has in common almost an enumerable set and each set contains at least one point of every perfect set in J .
Chittenden (Iowa).

Bureau, Florent, et Henri Malchair: Sur les fonctions de classe α ne prenant qu'un nombre limité de valeurs différentes. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 19, H. 1, 1—19 (1934).

A function of class α will be denoted by F^α if it is the limit of a non-increasing sequence of functions [defined on the interval (c, d)] of class $< \alpha$. A set E is said to be F [O] of class α if there exists a function $\Phi(x)$ of class $\leq \alpha$ such that $E = E(\Phi = 0)$ [$= E(\Phi \neq 0)$]. Among other results, the following theorems are proved: Let $\alpha \geq 2$ be a transfinite ordinal of the first kind, and $f(x)$ a function [defined on (c, d)] taking on no more than \aleph_0 different values, which constitute a decreasing sequence; if the sets $E(f \geq a)$ are F of class $\alpha - 1$, and not all of these are of lower class for a an arbitrary constant, there f is the limit of a sequence of functions of class $< \alpha$. A finite function $f(x)$ of class $\alpha > 0$ taking on only a finite number of different values is the difference of two functions, one an F^α and the other an F^α or a function of class $< \alpha$; f may be developed in an absolutely convergent series of functions of class $< \alpha$. A necessary and sufficient condition that a function [defined on (c, d)] taking on only a finite number of different values $a_1 > a_2 > \dots > a_p$ be of class $\alpha > 0$ is that the sets $E(f = a_i)$ [resp. $E(f > a_i, f < a_i, f \geq a_i, f \leq a_i)$], $r = 1, 2, \dots, p$, be A of class α and that they are not all of lower class; a set E is A of class α if it is both F and O of class α .
Blumberg (Columbus).

Ricci, Giovanni: Sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni semicontinue. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 212—216 (1934).

In Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Dini (vgl. z. B. Hobson, Theory of functions of a real variable. Bd. 2. 2. Aufl. S. 116) wird gezeigt: E sei eine abgeschlossene Menge auf der Zahlengeraden, die Reihe $\mu_1(x) + \mu_2(x) + \dots$ konvergiere in E ; die Funktionen $u_\nu(x)$ seien im Punkte $\xi \in E$ halbstetig nach unten.

Es werde $f_n(x) = \sum_{\nu=1}^n u_\nu(x)$ gesetzt. $\sum_{\nu=1}^\infty u_\nu(x)$ konvergiert im Punkte ξ gleichmäßig, wenn a) $\sum_{\nu=1}^\infty u_\nu(x)$ nach oben halbstetig ist, b) zu jedem $\sigma > 0$ ein $\nu(\sigma)$ und eine Umgebung

$\Delta(\sigma)$ von ξ so angegeben werden kann, daß $f_n(x) < f_m(x) + \sigma$ gilt für jedes Paar $m \geq n \geq \nu(\sigma)$ und jedes $x \in E \cdot \Delta(\sigma)$. Sind die Funktionen $u_\nu(x)$ stetig, und ersetzt man unter Beibehaltung der übrigen Voraussetzungen b) durch c): Zu vorgegebenem $\sigma > 0$ und ganzem $N > 0$ soll sich ein ganzes $M(\sigma, N) > N$ so bestimmen lassen, daß für jeden Punkt von E und jedes $n \geq M$ (wenigstens) eine der Ungleichungen $f_\nu(x) < f_n(x) + \sigma < f(x) + 2\sigma$, $\nu = N + 1, N + 2, \dots, M$ gilt: so bilden a) und c) zusammen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Kon-

vergenz von $\sum_{\nu=1}^\infty u_\nu(x)$ in E .

H. Busemann (Kopenhagen).

Levi, Beppo: La nozione di „dominio deduttivo“ e la sua importanza in taluni argomenti relativi ai fondamenti dell'analisi. Fundam. Math. 23, 63—74 (1934).

This paper presents to the readers of the Fundam. Math. the ideas of the author substantially contained in his two articles, Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni, Scritti matematici offerti a Enrico D'Ovidio-Torino, Bocca, 1918, and Sui procedimenti infiniti, Math. Ann. 90 (1923). The considerations are of a critical, meta-mathematical nature. Fundamental is the idea that in every mathematical theory there are certain primary aggregates defining the deductive domain of the theory. On the basis of this idea and the clari-

fication of the distinction between an existence proof and the extension of a deductive domain, the author subjects to critical analysis various questions involving the multiplicative axiom, concluding, in particular, that Zermelo's Wohlordnungssatz cannot be regarded as proved. The author points out the relatively of existential proofs—that every existential proof is of constructive nature in a suitably chosen deductive domain. Importance is attached to a certain “principle of approximation”, defining what the author calls a “natural extension” of a deductive domain. This principle renders the multiplicative axioms unnecessary in various arguments. *Blumberg.*

Viola, Tullio: *Ricerche assiomatiche sulle teorie delle funzioni d'insieme e dell'integrale di Lebesgue.* Fundam. Math. 23, 75—100 (1934).

The purpose of this paper is to show how various definitions and proofs involving Zermelo's Auswahlprinzip may be made more precise by the use of Beppo Levi's concept of “deductive domain” and his “principle of approximation” (cf. B. Levi, La nozione di “dominio deduttivo”; see the prec. ref.). The propositions examined with this purpose of heightened rigor are taken from the theory of functions of sets and the theory of the Lebesgue integral, such as the theorem that a finite, completely additive set-function is bounded and of limited variation, or the theorem on the metric density of a point set, or the Vitali Covering Theorem, or various theorems on the summability of the Dini derivatives. In some cases, the use of the Auswahlprinzip is entirely dispensed with; in some other cases, the principle of approximation of B. Levi is used to regularize the proof. *Blumberg* (Columbus).

Wendelin, Hermann: *Nachtrag zur R-Integrierbarkeit von zusammengesetzten Funktionen.* Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 19, 261—264 (1934).

Der Autor beweist u. a., als Verallgemeinerung des ersten Satzes seiner Mitteilung [Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 17, 198—201 (1934); dies. Zbl. 9, 306]: „Wenn $F(f_1, f_2, \dots, f_n)$ stetig ist in bezug auf (f_1, f_2, \dots, f_n) und $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ in (a, b) R -integrierbar sind, so ist auch $F(f_1, f_2, \dots, f_n)$ in (a, b) R -integrierbar. Schon wenn F endlich viele Unstetigkeitsstellen als Funktion von f_1, f_2, \dots, f_n hat, braucht F in (a, b) nicht mehr R -integrierbar zu sein.“ Der erste Teil dieses Satzes findet sich, nach Hobson, Theory of functions 1 (Third Ed. 1927), 473, schon bei Du Bois-Reymond. *J. Ridder.*

Kennedy, Margaret D., and S. Pollard: *Upper and lower integrals.* Math. Z. 39, 432—454 (1934).

Les auteurs considèrent quelques généralisations de la notion de continuité absolue. Une fonction est appelée absolument continue inférieurement (supérieurement) sur un ensemble fermé Q , lorsqu'elle n'y diffère que par une fonction monotone, non-décroissante (non-croissante). Une fonction est dite presque absolument continue inférieurement (supérieurement) dans un intervalle, lorsque tout ensemble fermé contient une portion sur laquelle cette fonction est absolument continue inférieurement (supérieurement). À l'aide de ces fonctions et en suivant la méthode des majorantes et des minorantes de Perron, les auteurs donnent cinq définitions de l'intégrale. À titre d'exemple nous en citerons la première: Étant donnée une fonction $f(x)$ dans (a, b) , une fonction $\varphi(x)$, où $\varphi(a) = 0$, est dite une minorante de $f(x)$, lorsque $1^\circ \varphi(x)$ est prépondéramment continue dans (a, b) , c. à d. qu'en tout point $\varphi(x)$ est continue par rapport à un ensemble de densité $> 1/2$ en ce point, $2^\circ \varphi(x)$ est presque absolument continue supérieurement, 3° presque partout $\varphi^*(x) \leq f(x)$, $\varphi^*(x)$ désignant la dérivée approximative de $\varphi(x)$. Les fonctions majorantes sont définies de façon symétrique. Lorsque $f(x)$ admet des minorantes (majorantes) dans (a, b) , leur borne supérieure (inférieure) est appelée intégrale indéfinie de $f(x)$. Lorsque ces deux intégrales coïncident, elles sont nommées intégrale indéfinie de $f(x)$ tout court. On obtient ainsi un nouveau procédé d'intégration; les auteurs remarquent sur un exemple que deux fonctions peuvent être intégrables dans ce sens sans que leur somme le soit. — En modifiant convenablement la définition précédente on est conduit aux méthodes d'intégration bien connues; à savoir à celle de Denjoy au sens général, à celle de Khintchine, intermédiaire entre les deux

procédés de Denjoy, à celle de Denjoy au sens restreint, et ensuite à celle de Lebesgue. P. ex. pour obtenir l'intégrale générale de Denjoy il suffit de remplacer dans la définition de ci-dessus la condition de la continuité prépondérante des majorantes et des minorantes par celle de la continuité au sens ordinaire. *Saks (Warszawa).*

Kempisty, Stefan: The extreme derivatives of functions of one and more variables. *J. London Math. Soc.* **9**, 303—308 (1934).

In this note the theory of monotone sequences of Young is constantly applied. From the theorems proved we mention: 1. The upper derivate $\overline{D}f$ of a finite function $f(x)$, defined in a set E , is a ulu-function and the lower derivate $\underline{D}f$ is a lul-function of Young in E , and so both are at most of Baire's third class. 2. If in E $f(x, y)$ is a continuous function of y , $\overline{D}_x f$ is a ulu-function of (x, y) and $\underline{D}_x f$ is a lul-function of (x, y) in E . 3. If $f(x, y)$ is in E continuous with respect to y and $\overline{D}_x f = \underline{D}_x f$, then $\frac{\partial f}{\partial x}$ will be at most of Baire's first class in E . 4. If $f(x, y)$ is measurable in E , then $\underline{D}_x f$ and $\overline{D}_x f$ are also measurable in E . *J. Ridder (Groningen).*

Sargent, W. L. C.: The Borel derivatives of a function. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **38**, 180—196 (1934).

When $f(x)$ is finite and integrable in the special Denjoy sense, the upper right Borel derivate $BD^+ f(x)$ and the lower right Borel derivate $BD_+ f(x)$ are defined by

$$BD^+ f(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_{x+\varepsilon}^{x+h} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} dt,$$

$$BD_+ f(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_{x+\varepsilon}^{x+h} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} dt.$$

When all four extreme Borel derivatives are equal, their common value defines the Borel derivative $BDf(x)$. It is proved that the Borel derivatives are measurable functions of x . After Khintchine, *Fundam. Math.* **9**, 233—238 (1927), there exists a continuous function with a finite approximate derivative at points of a set of positive measure, which has an infinite one-sided Borel derivative at almost all points of this set. As an addition to this result the fundamental proposition of the note is to be considered: "If $f(x)$ is finite and integrable in the special Denjoy sense and $BD^+ f$, $BD_+ f$ are finite at the points of a measurable set E , then, almost everywhere in E , the Borel derivative and the approximate derivative of $f(x)$ exist and have the same value."

J. Ridder (Groningen).

Analysis.

Radsischewsky, L.: Neue Verallgemeinerung des Satzes vom Differenzmittelwert einer Funktion. *Rec. math. Moscou* **41**, 233—234 u. dtsch. Zusammenfassung 234 (1934) [Russisch].

Es seien $2n$ stetig differenzierbare Funktionen gegeben:

$$U_k = U_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad V_k = V_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Bezeichnungen: $A_{h_s} U_k = U_k(\dots, x_s + h_s, \dots) - U_k(\dots, x_s, \dots)$ und analog für V_k ; $\xi_s = x_s + \theta_s h_s$, $0 \leq \theta_s \leq 1$ ($s = 1, 2, \dots, n$). Satz:

$$\frac{\begin{vmatrix} A_{h_1} U_1, \dots, A_{h_1} U_n \\ \dots \dots \dots \\ A_{h_n} U_1, \dots, A_{h_n} U_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{h_1} V_1, \dots, A_{h_1} V_n \\ \dots \dots \dots \\ A_{h_n} V_1, \dots, A_{h_n} V_n \end{vmatrix}} = \frac{\frac{D(U_1, \dots, U_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)}}{\frac{D(V_1, \dots, V_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)}}.$$

Anwendung auf die Variablentransformation in einem mehrfachen Integrale.

W. Stepanoff (Moskau).

Mambriani, Antonio: Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte. II. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 284—288 (1934).

Vgl. dies. Zbl. 10, 58.

Miniatoff, A.: Sur un théorème relatif au calcul approximatif des intégrales définies. Rec. math. Moscou 41, 349—352 u. franz. Zusammenfassung 353 (1934) [Russisch].

Etant admis que l'expression $\int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^m E_i f(x_i)$ ($0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < x_m < 1$) s'annule dès que $f(x)$ est une solution quelconque de l'équation

$$D(f) \equiv f^{(k)}(x) + p_1 f^{(k-1)}(x) + \dots + p_k f(x) = 0,$$

on obtient, pour toutes les fonctions $f(x)$ possédant une dérivée continue d'ordre k , l'inégalité suivante:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^m E_i f(x_i) \right| \leq L \max_{0 \leq x \leq 1} |Df|,$$

le nombre positif L étant indépendant de la fonction f . — La borne inférieure exacte des nombres L est donnée par la formule

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \left| \int_0^t \Psi(x-t) dx \right| dt + \int_{x_1}^{x_2} \left| \int_0^t \Psi(x-t) dt - E_1 \Psi(x_1-x) \right| dt + \\ & + \dots + \int_{x_m}^1 \left| \int_0^t \Psi(x-t) dt - E_1 \Psi(x_1-x) - \dots - E_m \Psi(x_m-x) \right| dx, \end{aligned}$$

où $\Psi(x)$ est l'intégrale de l'équation $D(f) = 0$ définie par les conditions initiales:

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \dots = \Psi^{(k-2)}(0) = 0, \quad \Psi^{(k-1)}(0) = 1.$$

W. Gontcharoff (Moscou).

Mitra, S. C.: On certain definite integrals. Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 185—190 (1934).

In this paper the operational calculus is used to derive a series of formulae of which the following will serve as illustration:

$$\int_0^1 \frac{\sin 2yt}{a^2 + y^2} dy = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}^2(t) Q_n(1+2a^2),$$

$$\int_0^1 \frac{\sin 4yt}{y} dy = \pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}^3(t) J_{-n-\frac{1}{2}}(t),$$

$$\int_0^1 e^{-2y^2 t} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+\frac{1}{2}}(t)$$

$$\int_0^1 \sin 2y^2 t dy = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \left\{ \sin t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+\frac{1}{2}}(t) - \cos t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+\frac{3}{2}}(t) \right\}.$$

Murnaghan (Baltimore).

Bergeot, Pierre: Sur la convergence en moyenne quadratique. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1181—1183 (1934).

Soit $\varphi_i(x)$ un système complet de fonctions continues orthonomées sur le segment (a, b) , et soit $f(x)$ une fonction de carré sommable sur (a, b) , développable en série de Fourier correspondante uniformément convergente sur (α, β) , où $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

L'auteur démontre que dans ces conditions la suite des fonctions $\Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} \varphi_i(x)$ converge aussi uniformément vers $f(x)$ sur (α, β) , si

$$\eta_n \cdot M_{\alpha, \beta}^{(n)} \rightarrow 0, \quad \text{où} \quad \eta_n^2 = \int_a^b [f(x) - \Phi_n(x)]^2 dx$$

et $M_{\alpha, \beta}^{(n)}$ est le maximum sur (α, β) de $\sqrt{\sum_{i=0}^n \varphi_i^2(x)}$. Il applique ensuite ce théorème au cas, où $\varphi_n(x) = \bar{P}_n(x)$ sont les polynômes normés de Legendre: dans ce cas pour la convergence uniforme sur une partie (α, β) du segment $(-1, +1)$ il suffit qu'on ait $\eta_n \sqrt{n} \rightarrow 0$, et pour la convergence uniforme sur tout le segment il suffit qu'on ait $n \eta_n \rightarrow 0$.
S. Bernstein (Leningrad).

Ward, Morgan: Note on the iteration of functions of one variable. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 688—690 (1934).

The author considers the interpolational iteration of $E(x)$, reducible as usual to the solution of the functional equation, $\Psi(x+1) = E(\Psi(x))$. For the case in which $E(x)$ is a real continuous single-valued function, properly monotonically increasing and greater than x in the range, $a \leq x < \infty$, an explicit solution is found. With no loss in generality one takes $a = 0$, and $E(0) = 1$. Then $\Psi(x) = E_{[x]}(x - [x])$, where $E_{n+1}(x) = E(E_n(x))$.
Bennett (Providence).

Barna, Béla: Ein Limesatz aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. J. reine angew. Math. **172**, 86—88 (1934).

Bezeichnet $\bar{M}(1, z)$ denjenigen Zweig des arithmetisch-geometrischen Mittels, dessen Betrag in der längs der negativen reellen Achse aufgeschlitzten Ebene möglichst groß ist, ferner mit $\log \frac{1}{z}$ den Hauptzweig des Logarithmus, so gilt, wie bekannt,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \bar{M}(1, z) \log \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}.$$

Hier konvergiert z in der aufgeschlitzten Ebene auf eine beliebige Weise gegen Null. Verf. gibt für diesen Satz einen Beweis, der auf der bekannten Entwicklung

$$\frac{1}{\bar{M}(1, \sqrt{1-\lambda})} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \right) \lambda^n$$

beruht. Die Grenzwertgleichung gilt auch für negativ-reelle z -Annäherung; für $\bar{M}(1, z)$ kann dann einer der beiden Grenzwerte auf den beiden Schlitzufern genommen werden.

Szegö (St. Louis, Mo.).

Magnier, André: Sur l'intégrale de Kronecker. Bull. Sci. math., II. s. **58**, 317 bis 328 (1934).

Démonstration complète des théorèmes énoncés dans une note publiée sous le même titre [C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1567 (1934); ce Zbl. **9**, 67]. W. Stepanoff.

Reihen:

Pincherle, Salvatore: Operatori normali di rango uno nello spazio delle serie di potenze. Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s. **37**, 95—105 (1933).

A linear normal operator on the space of power series is defined by $A(x^n) = \sum_{m=n}^{\infty} c_{nm} x^m$.

The operators considered in this paper are of the form $A(x^n) = p_n x^n - q_n x^{n+1}$, p_n, q_n all different from zero, p_{n+1}/p_n and $q_{n+1}/q_n \rightarrow 1$, p_n and $q_n \rightarrow \infty$ and $p_n/q_n \rightarrow \alpha \neq 0$ as $n \rightarrow \infty$. As a consequence A transforms a power series into a power series having at least the same circle of convergence. A transforms, at least formally, the space S of all power series into a subspace S_0 orthogonal to the vector l_0, l_1, \dots in the sense $\sum_n a_n l_n = 0$ where $\varphi = \sum a_n x^n$ and $p_n l_n - q_n l_{n+1} = 0$. The inverse A^{-1} exists on S_0 . When A^{-1} operates on an element of S not in S_0 , the resulting function has in general a singular point on the circle of radius $|\alpha|$. In the case $A(x^n) = \alpha x^n - x^{n+1}$ and $A^{-1}\varphi = \varphi/(x - \alpha)$, φ belongs to S_0 if it is divisible by $x - \alpha$. The results are applied to the linear differential equation:

$$\sum_0^m (a_n - b_n x) \frac{x^n}{n!} \frac{d^n y}{dx^n} = \varphi.$$

Hildebrandt (Ann Arbor).

Sidon, S.: Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen. Acta Litt. Sci. Szeged 7, 85—94 (1934).

The chief result of the paper is the following theorem: given any sequence of integers $\{n_k\}$ such that $n_{k+1}/n_k > \lambda > 1$, $k = 1, 2, \dots$, and any sequence $\{\varepsilon_k\}$ of complex numbers such that $\sum |\varepsilon_k|^2 < \infty$, there is a function $f(z) = \sum a_n z^n$ continuous for $|z| \leq 1$ and satisfying the equations $a_{n_k} = \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \dots$. This is a generalization of an analogous result of Banach [Studia Math. 2, 207—220 (1930)] for Fourier series.

A. Zygmund (Wilno).

Verblunsky, S.: On positive harmonic functions: A contribution to the algebra of Fourier series. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 125—157 (1934).

Consider the class of functions positive and harmonic (= PHF) inside the unit-circle $r = 1$, taking the value 1 for $r = 0$; they are uniquely represented by

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \equiv c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) r^n. \quad (1)$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \bar{c}_n.$$

This interesting paper deals with the "class P " of sequences $\{c_0 = 1, c_1, c_2, \dots\}$ — of "complex Fourier constants" for PHF, as defined above, whose " $n + 1$ initial constants" are $c_0 = 1, c_1, \dots, c_{n+1}$, generated by the functions (1). It thus continues the research started by Carathéodory and Toeplitz. The main object is to derive a parametric representation of PHF: the author shows the existence of a sequence p_n ($n = 1, 2, \dots$), p_n = polynomial in $2n - 1$ variables $x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n$, with integral coefficients, such that the class P is identical with the class defined by

$$c_n = p_n(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}, z_n), \quad |z_n| \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

The author first gives simple and lucid proofs of the fundamental properties of PHF (their relation to the Fourier moment-problem, to positive Hermitian forms, etc.). This leads, next, to necessary and sufficient conditions that a given finite sequence $c_0 = 1, c_1, \dots, c_m$ constitute the $m + 1$ initial constants of a PHF, then, to the above polynomials p_n . Various forms of the p_n are given. Also a method is given by which we can find p_{n+1} , if p_1, p_2, \dots, p_n are known, and this enables us to find all p_n , for $p_1(x_1) = x_1$. — The author investigates more closely the subclass P_n of P , which is obtained by letting in the above representation $z_{n+1} = z_{n+2} = \dots = 0$. Here, if p_1, p_2, \dots, p_n are known, the class P_n is defined by a recurrence relation

$$c_{n+r} + c_{n+r-1}X_1 + \dots + c_r X_n = 0 \quad (r = 1, 2, \dots)$$

(X_i = known polynomials in $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}, z_n$).

This recurrence relation is actually constructed for P_2, P_3, P_4 . In all these considerations an important role is played by, and interesting results are obtained for, the "Laurentian determinant"

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_{-1} & 1 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

J. Shohat (Philadelphia).

Jackson, Dunham: The summation of series of orthogonal polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 743—752 (1934).

Die Summabilität von Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen wird mit elementaren Hilfsmitteln (Schwarzsche und Höldersche Ungleichung) untersucht. Ist $\varrho(t)$ die Gewichtsfunktion im Orthogonalitätsintervall $-1, +1$, so ist die Entwicklung von $f(t)$ nach den entsprechenden orthogonalen Polynomen an der Stelle $x, -1 < x < +1$, summabel, wenn $\varrho(t) \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right|^\alpha$ und $\varrho(t)^{-r}$ im Lebesgueschen

Sinne integrabel sind; hier ist $r > 1$, $\alpha > \frac{4}{3} \frac{r+1}{r+1/3}$. — Für $\varrho(t) \geq \varrho > 0$ kann r beliebig groß gewählt werden, so daß α der Bedingung $\alpha > \frac{4}{3}$ unterliegt. Besonders einfach ist der Fall $\alpha = 2$. Zum Schluß werden einige Andeutungen über allgemeinere Summationsmethoden sowie über die entsprechende trigonometrische Aufgabe gemacht.

Szegő (St. Louis, Mo.).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Braitzeff, J. R.: Sur l'allure de la fonction définie par une série de Dirichlet au voisinage de son point singulier. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 1005—1007 (1934).

L'auteur démontre que sa méthode de détermination des points singuliers des fonctions définies par des séries de Dirichlet (voir ce Zbl. **6**, 64 et **7**, 351) permet aussi de définir l'allure d'une telle fonction au voisinage de chacun de ses points singuliers. Plus précisément, il démontre que, ξ étant un sommet de l'étoile principale de Mittag-Leffler de la fonction $F(z) = \sum a_n z^{i n}$ (considérée sur la surface de Riemann de $\log z$), on peut construire une série de Taylor $G(z) = \sum b_n z^n$, dont le rayon de convergence soit égal à $|\xi|$, et pour laquelle la différence $F(z) - G(z)$ soit holomorphe au point ξ .

Vlad. Bernstein (Milano).

Braitzeff, J. R.: Sur la représentation de la fonction qui est donnée par son développement en série de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 1179—1181 (1934).

L'auteur, en poursuivant ses recherches sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (\lambda_n \uparrow \infty) \quad (1); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{|a_n|} > 0 \quad (2)$$

(voir ce Zbl. **6**, 64; **7**, 351 et le réf. préc.), a obtenu pour la fonction $f(s)$ l'expression

$$f(s) = \Delta \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k (n^{\alpha} e^{-s})^{\lambda_k}}{\Gamma(\alpha \lambda_k + 2)} \quad (\Delta - \text{const. numér.}) \quad (3),$$

valable dans tout domaine fermé, intérieur à l'étoile principale de Mittag-Leffler de $f(s)$; dans la présente Note il donne le schéma des raisonnements qui l'y ont conduits.

— Le soussigné a l'impression que l'auteur (à moins de modifier le schéma des raisonnements) aurait dû ajouter à la restriction (2) la restriction (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0$ qui figure

d'ailleurs dans un des Mémoires précédents (voir ce Zbl. **7**, 351). — D'autres expressions analytiques de $f(s)$, valables à l'intérieur de l'étoile principale de $f(s)$ [indépendamment des restrictions (2) et (4)] ont d'ailleurs été données par M. M. Riesz dès 1911 (voir loc. cit. en ce Zbl. **6**, 64).

Vlad. Bernstein (Milano).

Utzinger, Albert A.: Die reellen Züge der Riemannschen Zetafunktion. Zürich: Diss. 1934. 31 S.

Für eine meromorphe Funktion $w = f(z)$ mögen die wesentlich singulären Stellen der Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ an reellen Stellen der w -Ebene liegen. Dann liefern die „reellen Züge“ [die Kurven $\Im f(z) = 0$ der z -Ebene] eine gute Übersicht über die Werteverteilung und damit über die Riemannsche Fläche von $f(z)$. Verf. wendet diese „Methode der reellen Züge“ zur Untersuchung der Γ - und der ζ -Funktion an. Die reellen Züge werden für beide Funktionen im wesentlichen mit Hilfe der Funktionalgleichungen zunächst qualitativ angegeben und skizziert. Bei der ζ -Funktion sind noch Zusatzüberlegungen wegen des Verhaltens der reellen Züge in der Nähe der kritischen Geraden erforderlich. Die Riemannsche Fläche der Γ -Funktion kann man sich aus der Fläche von e^z durch Anheften einer „halben“ $\cos z$ -Fläche an eines ihrer Blätter entstanden denken; die Windungspunkte des $\cos z$ -Teils liegen gegeneinander versetzt. Die Fläche der ζ -Funktion hat dieselben Hauptteile; doch wachsen noch weitere Blätter (je in endlicher Anzahl) aus den Blättern des Exponentialteils heraus. Am Schluß der Arbeit Formelzusammenstellung, Tabellen, maßstäbliche Zeichnung der reellen und rein imaginären Linien von $\zeta(z)$.

Th. Zech (Darmstadt).

Speiser, Andreas: Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion. Math. Ann. **110**, 514—521 (1934).

Wegen der ersten Seiten vgl. das vorstehende Referat der Diss. Utzinger.

Speiser betrachtet außerdem $\eta(z) = \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \pi^{-\frac{z}{2}} \zeta(z)$. Über $\eta(z)$ und $\zeta(z)$ werden geometrische Aussagen gemacht, die mit der Riemannschen Vermutung über die Nullstellen der ζ -Funktion äquivalent sind. In beiden Fällen handelt es sich um das Verhalten der reellen Züge in der Nähe der kritischen Geraden; z. B. müssen alle reellen Züge der ζ -Funktion, welche in die Nähe der kritischen Geraden kommen, diese auch erreichen. Allgemeiner betrachtet Verf. Linien konstanter Amplitude von $\zeta(z)$. Sie können die kritische Gerade nur in Nullstellen von $\zeta(z)$ berühren. Die Behauptung, daß alle Nullstellen der Ableitung $\zeta'(z)$ rechts von der kritischen Geraden oder auf ihr liegen, ist ebenfalls mit der Riemannschen Vermutung äquivalent. *Th. Zech.*

Differentialgleichungen:

Peyovitch, Tadya: Sur la valeur des intégrales à l'infini des équations linéaires homogènes. Bull. Sci. math., II. s. **58**, 300—307 (1934).

In dem System $\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) strebe $a_{ik}(t) \rightarrow \overline{a_{ik}}$ für $t \rightarrow \infty$. Bedeute λ eine Zahl, deren Realteil größer ist als die Realteile aller Wurzeln ϱ von $\|\overline{a_{ik}} + \varrho \delta_{ik}\| = 0$. Dann wird mit Hilfe sukzessiver Approximation die Existenz eines (von n willkürlichen Parametern abhängigen) Lösungssystems x_i bewiesen, für das $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_i}{e^{\lambda t}} = 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ gilt.

Rellich (Marburg, Lahn).

Haag, Jules: Sur les oscillations auto-entretenues. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 906—909 (1934).

In seiner Arbeit (Rev. gén. Électr. **1928**, 901) zeigte A. Lienard, daß die Frage nach dem Auffinden periodischer Lösungen der Gl. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega f(x) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ auf die Bestimmung einer geschlossenen Kurve A , die die folgenden Eigenschaften besitzt, zurückgeführt werden kann: die Normalen in zwei Punkten dieser Kurve P und P' , welche eine gemeinsame Abszisse besitzen, schneiden sich in einem Punkt Q , der auf der y -Achse liegt; der Punkt M , in welchem die Gerade PP' die Parallele zur y -Achse durch den Punkt Q schneidet, beschreibt eine Kurve Γ , deren Gleichung die Gestalt $y = F(x) = \int_0^x f(x) dx$ besitzt, d. h. die Kurve Γ ist primitiv für den „Widerstand“ $f(x)$.

Verf. löst die Frage nach dem Auffinden eines allgemeinen Ausdruckes für solche A -Kurven und nach dem Zusammenhang der Kurven A und Γ als eine rein geometrische Aufgabe, ganz abgesehen von der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche die A -Kurve einen Grenzykel (nach der Terminologie von Poincaré) darstellt. Dem Verf. ist es gelungen, einen Ausdruck verhältnismäßig einfacher Form für die Kurven A und Γ , der eine willkürliche Funktion und ω enthält, aufzustellen. Endlich gibt Verf. eine Methode zur asymptotischen Berechnung dieser geschlossenen Kurve (die Γ -Kurve gegeben) für den Fall, daß diese Kurve in der y -Richtung sehr ausgezogen ist, was dem Falle der Relaxationsschwingungen entspricht.

A. Andronow u. A. Witt (Moskau).

Neufeld, Jacob: On the operational solution of linear mixed difference differential equations. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 389—391 (1934).

In this paper the operational method of Heaviside is applied to give an explicit solution of the equation

$$\sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{k=N_r} \frac{d^r}{dx^r} a_{rk} u(x-k) = F(x),$$

where the a_{rk} are given constants and the initial values ($u_0, \dots, u_0^{(n-1)}$) of u and its successive derivatives up to and including the $(n-1)$ -st are prescribed. The solution is

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(p)}{p} e^{px} dp \quad \text{where} \quad f(p) = \frac{\int_0^\infty e^{-px} F(x) dx + \sum_{r=0}^n \sum_{v=0}^{r-1} a_{r0} p^v u_0^{(r-1-v)}}{\sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{k=N_r} a_{rk} p^{r-1} e^{pk}}.$$

Murnaghan (Baltimore).

Nakano, Hidegorô: Zur Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen.

Jap. J. Math. **11**, 59—129 (1934).

Le mémoire contient une étude des relations entre une équation

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0$$

et sa „solution caractéristique“ $\chi(x, t)$, c. à d. la solution vérifiant les conditions initiales:

$$\left[\frac{\partial^i \chi(x, t)}{\partial x^i} \right]_{x=t} = \begin{cases} 0 & (i = 1, 2, \dots, n-2), \\ 1 & (i = n-1). \end{cases}$$

La première partie contient une exposition détaillée des relations (connues en partie) liant cette solution à l'équation intégrale de Volterra correspondante, à l'équation différentielle adjointe, à la factorisation symbolique du premier membre de l'équation donnée. Citons un résultat: soit $L[y]$ égal au produit symbolique $MK[y]$; alors les solutions caractéristiques φ, χ, ψ correspondant à L, K, M respectivement, vérifient

l'équation fonctionnelle: $\varphi(x, t) = \int_t^x \psi(x, \xi) \chi(\xi, t) d\xi$. La seconde partie est consacré

à l'étude, à l'aide des solutions caractéristiques, de la propriété nommée par l'auteur „Volleigentlichkeit“, qui consiste dans la possibilité de décomposer $L[y]$ dans un intervalle donné (a, b) en facteurs symboliques du premier ordre aux coefficients réels [cette propriété a été étudiée dans les travaux importants de Mammanna, Math. Z. **26**, 33; ce Zbl. **1**, 15; mais l'aut. ne cite que son mémoire récent, „Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen“, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (I) **3**, 1 (1934)]. Comme caractéristique numérique attachée à cette propriété, l'aut. introduit la notion „Volleigentlichkeitsgrad“, égale à la borne inférieure de deux Wronskiens:

$$W_x(\chi(x, t_1), \dots, \chi(x, t_n)) / W_x\left(\frac{(x-t_1)^{n-1}}{(n-1)!}, \dots, \frac{(x-t_n)^{n-1}}{(n-1)!}\right) \quad \text{pour } t_1, \dots, t_n \in (a, b);$$

cette expression atteint son maximum 1 lorsque l'intervalle se réduit à un point; elle est positive en tout intervalle intérieur à (a, b) , si $L[y]$ est „volleigentlich“ dans (a, b) .
W. Stepanoff (Moskau).

Perausówna, J.: Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation $p + f(x, y, z) q = g(x, y, z)$. Ann. Soc. Polon. math. **12**, 1—5 (1934).

Ważewski, T.: Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire. Ann. Soc. Polon. math. **12**, 6—15 (1934).

Über die lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{v=1}^n f_v(x, y_1, \dots, y_n, z) \frac{\partial z}{\partial y_v} = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n, z) \quad (1)$$

wird vorausgesetzt, daß die f_v , nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_v}{\partial y_\mu}$ für $\mu, v=1, \dots, n+1$ ($y_{n+1}=z$ gesetzt) in dem Bereich

$$|x| < a \leq +\infty, \quad -\infty < y_1, \dots, y_n, z < +\infty$$

definiert und stetig sind und daß in diesem Bereich jedes $\left| \frac{\partial f_v}{\partial y_\mu} \right| < A$ ($\mu, v=1, \dots, n+1$) ist. Ist $\omega(y_1, \dots, y_n)$ eine Funktion, die für $-\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$ stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung hat, für die $\left| \frac{\partial \omega}{\partial y_v} \right| \leq C$ ($v=1, \dots, n$) gilt, so hat

die Differentialgleichung (1) in einem Bereich

$$|x| < \alpha, \quad -\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$$

genau ein Integral $z = \chi(x, y_1, \dots, y_n)$ mit den Anfangswerten $\chi(0, y_1, \dots, y_n) = \omega(y_1, \dots, y_n)$. — Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß auch die Funktionen f_v selber beschränkt seien, hatte Ref. (Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, S. 335. Leipzig 1930) eine Angabe über α gemacht. In den obigen Arbeiten wird diese Angabe verschärft. Frl. Perausówna beweist, daß für $n = 1$

$$\alpha = \text{Min}\left(a, \frac{1}{A(1+C)}\right),$$

und Ważewski, daß für $n \geq 2$

$$\alpha = \text{Min}\left(a, \frac{1}{A(n-1)} \log \frac{n(C+1)}{nC+1}\right)$$

gesetzt werden kann. Ferner wird gezeigt, daß es zu jedem n eine Differentialgleichung gibt, für welche diese Zahlen α nicht durch größere ersetzt werden können.

Kamke (Tübingen).

Ważewski, T.: Eine Verallgemeinerung des Montelschen Satzes über das Maximal- und Minimalintegral auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Ann. Soc. Polon. math. 12, 72—80 (1934).

Über die rechten Seiten f, g der Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \quad (1)$$

wird nur vorausgesetzt, daß sie in dem Zylinder

$$0 \leq x \leq a < +\infty, \quad y^2 + z^2 \leq R^2 \quad (R > 0) \quad (2)$$

stetig sind. Es gibt dann ein $0 < r < R$, so daß jede Integralkurve des Systems (1), die von einer r -Umgebung des Nullpunktes 0 ausgeht, für $0 \leq x \leq a$ existiert und im Zylinder (2) verläuft. Ist S eine auf der Kreisscheibe

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 \leq r^2 \quad (3)$$

gelegene Punktmenge, so bilden die Punkte, die auf Integralkurven liegen, die von Punkten der Menge S ausgehen, die „Röhre $H(S)$ “; ist $S = P$ ein Punkt, so heißt $H(P)$ Integraltrichter. Den „äußeren Bereich“ von $H(S)$ bilden die Punkte, die mit dem Punkt ∞ mittels einer stetigen Kurve verbunden werden können, die der Schicht

$$0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y, z < +\infty \quad (4)$$

angehört und keinen Punkt mit $H(S)$ gemein hat. Eine in der Kreisscheibe (3) gelegene Punktmenge S „trennt den Punkt 0 vom Punkt ∞ “, wenn jede stetige Kurve, die in der Ebene $x = 0$ den Punkt 0 mit dem Punkt ∞ verbindet, mit S Punkte gemein hat. Verf. zeigt: Die Punkte der Schicht (4), die nicht zu dem Integraltrichter $H(0)$ gehören, bilden ein Gebiet. — Ist S_1, S_2, \dots eine Folge von beschränkten abgeschlossenen Mengen, die in dem Kreise (3) liegen, den Punkt 0 vom Punkt ∞ trennen und deren Durchmesser gegen Null konvergiert, so konvergiert der Rand des äußeren Bereichs der Röhre $H(S_v)$ gegen den Rand des Trichters $H(0)$. Dieser Satz läßt sich auf Systeme von beliebig vielen Differentialgleichungen ausdehnen und kann als Verallgemeinerung eines von Montel für eine Differentialgleichung bewiesenen Satzes angesehen werden.

Kamke (Tübingen).

Turski, Stanisław: Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Ann. Soc. Polon. math. 12, 81—86 (1934).

Ein Eindeutigkeitskriterium und Abschätzungssatz für die partielle Differentialgleichung

$$p = f(x, y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n)$$

mit ziemlich kompliziertem Wortlaut. Das Kriterium ist eine Verallgemeinerung eines Kriteriums von Ważewski.

Kamke (Tübingen).

Sbrana, Francesco: Sulla integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti. Atti Soc. Ligust. Sci., Genova **13**, 177—211 (1934).

Fundamental solutions or "generating functions" are obtained by the well known method of the Fourier integral with suitable modifications to make it applicable to hyperbolic and parabolic equations. In the case of the equation of the vibrating string use is made of the equation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ \cos[\beta(y - \eta)] - \cos[\alpha(y - \eta)] \} \frac{d\beta}{\beta^2 - \alpha^2} = \pm \frac{\pi}{\alpha} \sin \alpha(y - \eta),$$

where the upper or lower sign is taken according as y is less than or greater than η . Further analysis then depends on the use of Dirichlet's discontinuous integral. The generating function G is thus found to be discontinuous at the surface of the cone $(x - \xi)^2 = (y - \eta)^2$, the two values differing by $1/4$. Solutions are obtained of boundary problems that are usually solved by the method of characteristics. — The equation for the transverse vibrations of a thin elastic rod is next considered and use is made of another integral of Dirichlet to obtain an expression for the generating function involving the integral with respect to μ of $\cos \alpha + \sin \alpha$ divided by $|\mu|^{-1/2}$, where $4\alpha|\mu| = (x - \xi)^2$. Use is made also of generating functions which can be expressed in terms of the integrals of $(\cos \Phi^2 + \sin \Phi^2) \Phi^{-2}$ and of $\sin \Phi^2 \mp \cos \Phi^2$. A function L is, in fact, associated with G by means of the equations

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -\frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

and expressions are obtained for L , G and the limiting values of these quantities when either x or y tends to zero. A discussion is given of the properties of integrals involving the function G and some problems are solved with the aid of Abel's integral equation.

H. Bateman (Pasadena).

Pólya, G.: Quelques théorèmes analogues au théorème de Rolle, liés à certaines équations linéaires aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 655—657 (1934).

Soit D l'une des trois opérations:

$$1. \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad 2. \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad 3. \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}.$$

Le domaine fondamental est, dans le 1^{er} cas, une région plane bornée et simplement connexe; dans le 2^{me} cas, un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées; dans le 3^{me} cas, une région bornée, dont une partie de la frontière est un segment de Ox , le reste de la frontière étant situé dans la région $y < 0$. La fonction u étant définie dans cette région fondamentale, l'aut. entend par $Cu = 0$: dans le 1^{er} cas, que u s'annule sur la frontière; dans le 2^{me} cas, que u et ses dérivées s'annulent sur une courbe qui joint deux sommets opposés du rectangle, et dont aucune tangente n'est parallèle à un axe de coordonnées; dans le 3^{me} cas, que u s'annule sur la partie de la frontière qui n'est pas située sur Ox . Si u est une fonction donnée, et si H et N sont les fonctions déterminées par les conditions

$$DH = 0, \quad C(H - u) = 0, \quad DN = 1, \quad CN = 0,$$

on a, quel que soit (x, y) , dans la région fondamentale,

$$u(x, y) = H(x, y) + N(x, y) Du(\xi, \eta),$$

où (ξ, η) est intérieur à la région fondamentale; cela généralise le théorème des accroissements finis et, si l'on a $Cu = 0$ et $u = 0$ encore en un point, le théorème de Rolle. L'aut. ajoute quelques indications sur d'autres généralisations.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Pólya, G.: Sur l'application des opérations différentielles linéaires aux séries. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 766—767 (1934).

L'auteur poursuit dans cette note l'étude des analogies entre l'opération $\partial/\partial z$

et l'opération $D = \sum \varphi^{\alpha, \beta}(x, y) \partial^{\alpha+\beta} / (\partial z^{\alpha} \partial y^{\beta})$ (voir le réf. préc.). Il annonce que si des fonctions f_n , bornées dans leur ensemble, ont une limite f , si les Df_n existent et tendent uniformément vers une limite g , et si enfin Df existe, on a $Df = g$. Il y a des cas où l'on peut s'affranchir de l'hypothèse que Df existe, mais c'est impossible dans d'autres cas.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Ruse, H. S.: The general solution of the partial differential equation $V_i^2 + 2KV = 0$ in a two-dimensional space of constant curvature K . Philos. Mag., VII. s. 18, 921—927 (1934).

Es wird eine von zwei willkürlichen Funktionen abhängige Lösung der untersuchten Gleichung angegeben. (V_i^2 = zweiter Beltramischer Differentialparameter.)

Willy Feller (Stockholm).

Robertson, James: On the solutions of problems in heat-conduction by the method of wave-trains. Philos. Mag., VII. s. 18, 1009—1022 (1934).

Es werden zylindrische Wärmeleitungsprobleme mit der von G. Green und Verf. in einer Reihe früherer Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 2, 365; 6, 348; 9, 256) angewandten Methoden der Wellenzüge behandelt.

E. Rothe (Breslau).

Giraud, Georges: Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique. Ann. Soc. Polon. math. 12, 35—54 (1934).

Eine gemischte Randwertaufgabe für lineare elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung Fu wird betrachtet. Es soll nämlich in einem m -dimensionalen Gebiete \mathfrak{G} eine Lösung u von $Fu = f$ gefunden werden, die an einem Teile des Randes Bedingungen vom Dirichletschen, am anderen Teile vom Neumannschen Typus erfüllt (woraus sich gewisse notwendige Relationen ergeben). Das Gebiet \mathfrak{G} ist entweder euklidisch oder auf einer m -dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit \mathfrak{B} — mit einer durch die

positiv-definite Form $\sum_{i,k=1}^m g_{ik} dx^i dx^k$ gegebenen Metrik — ausgebreitet. Mittels einer entsprechenden Greenschen Funktion wird diese Aufgabe auf die Lösung einer Integralgleichung zurückgeführt. Ähnlich kann das Problem behandelt werden, eine in \mathfrak{B} durchweg reguläre Lösung von $Fu = f$ zu bestimmen.

Schauder (Lwów).

Caccioppoli, Renato: Sui teoremi d'esistenza di Riemann. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 4, 49—54 (1934).

Verf. betrachtet die Familie aller reellen zweimal differenzierbaren Funktionen φ der Riemannschen Fläche. Jeder solchen ordnet er in eindeutiger und stetiger Weise eine andere Funktion M zu. Konvergiert nun eine Folge M_1, M_2, \dots identisch gegen Null, so konvergiert die zugeordnete Folge $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ gegen eine harmonische Funktion φ . Ein Verfahren zur tatsächlichen Gewinnung von φ wird nicht angegeben.

Ott-Heinrich Keller (Berlin).

Michlin, S.: Le théorème de l'unicité relatif au problème biharmonique fondamental. Rec. math. Moscou 41, 284—291 u. franz. Zusammenfassung 291 (1934) [Russisch].

Es wird die Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung $\Delta \Delta u = 0$ studiert, wenn am Rande eines einfach oder mehrfach konnexen Gebietes G u und $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ vorgegeben sind. Bei Muschelišvili (dies. Zbl. 5, 358) war dieses Problem gelöst unter der Bedingung, daß Δu und die mit Δu konjugierte harmonische Funktion bis zum Rande stetig sind. Hier wird eine einfachere Bedingung gestellt, nämlich daß im offenen Gebiete G $|\Delta u| \leq M$ gilt und daß der Rand aus rektifizierbaren Kurven besteht.

Janczewski (Leningrad).

Ciorănescu, Nicolas: Une propriété caractéristique des fonctions poly-harmoniques. Bul. fac. şti. Cernăuţi 7, 105—107 (1934).

A function $u(x, y)$ is said to be harmonic of order p in an open region D if $\Delta^{(p)} u = 0$ identically in D , where $\Delta^{(k)} = \Delta(\Delta^{(k-1)})$ for $k > 1$ and $\Delta^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ denotes the Laplace operator. The following theorem is established: In order that a function

$u(x, y)$, analytic in an open region D , should be harmonic of order p , it is necessary and sufficient that $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{2p-1} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)}{\partial r^{2p-1}} d\theta \rightarrow 0$ at

any point (x, y) in D . The theorem holds and is established by the author for functions of n variables. It is a generalization of the Koebe-Bôcher theorem for harmonic functions. Saks (Warszawa).

Weinstein, D. H.: Modified Ritz method. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **20**, 529 bis 532 (1934).

Gegeben ein Randwertproblem $H\psi_n = W_n\psi_n$; die Eigenwerte W_n sind nach der Größe numeriert: $W_0 \leq W_1 \leq W_2 \dots$. Man bilde mit einer beliebigen Funktion ξ die Integrale $J_1 = \int \xi H \xi^* dt$ und $J_2 = \int (H \xi)^2 dt$. Dann gilt, wenn J_1 seinem Wert nach dem Eigenwert W_j am nächsten liegt:

$$\sqrt{J_2 - J_1^2} + J_1 \geq W_j \geq J_1 - \sqrt{J_2 - J_1^2}. \quad \text{Bechert (Gießen).}$$

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

● **Kostitzin, V. A.: Applications des équations intégrales (applications statistiques).** Mém. Sci. math. Fasc. **69**, 49 S. (1935).

Diese Schrift beschäftigt sich mit einer Gruppe von linearen Integralgleichungen, die bei einigen statistischen und optischen Problemen auftreten. Im ersten Abschnitt wird eine Volterrasche Gleichung diskutiert, welche einem Problem der Bevölkerungsstatistik entspringt. Der zweite Abschnitt berichtet von den Arbeiten von Hilbert, Hecke und Enskog über die Lösungen der Boltzmannschen Gleichung in der kinetischen Gastheorie. Der dritte Abschnitt handelt von einem speziellen Problem dieser Theorie, der stationären Bewegung eines dünnen Gases zwischen parallelen Wänden, von denen sich eine in sich verschiebt. Die entsprechende Integralgleichung für die Gasgeschwindigkeit (1875 von Kundt und Warburg aufgestellt) wird diskutiert. Im vierten Abschnitt werden kurz die Integralgleichungen von Schwarzschild und Milne für die Verteilung des Lichtes in einer absorbierenden und streuenden Sternatmosphäre betrachtet. E. Hopf (Watertown).

Fréchet, Maurice: Sur une expression générale des noyaux itérés. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 1008—1010 (1934).

This note considers the possibility of obtaining for the n th iterated kernel of an integral equation, an expression similar to that valid in the symmetric case for $n \geq 2$, viz. $K_n(M, P) = \sum_i \varphi_i(M) \varphi_i(P) / \lambda_i$, φ_i and λ_i , being the characteristic functions and constants of K . For this purpose the associated functions and constants of Schmidt, viz. $X(M) = \mu \int K(M, P) Y(P) dP$, $Y(P) = \mu \int X(P) K(P, M) dP$ are used and it develops that $K_n(M, P)$ is equivalent in the double mean to $\sum_{ij} \alpha_{ij}(n) X_i(M) Y_j(P) / \sqrt{\mu_i \mu_j}$, where the $\alpha_{ij}(n)$ are determined by the equations $\alpha_{ij}(n+p) = \sum_k \alpha_{ik}(n) \alpha_{kj}(p)$, $\alpha_{ij}(1) = \int \frac{X_i Y_j dP}{\sqrt{\mu_i \mu_j}}$, i. e. iteration by sum replaces an iteration by integrals. Detailed treatment of the latter problem is to be given in a more extensive paper. Hildebrandt (Ann Arbor).

Germa, R.-H.-J.: Généralisation du théorème d'existence des solutions des systèmes d'équations intégrales-différentielles contenant des intégrales de Stieltjes dont les fonctions déterminantes sont les solutions des équations proposées. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **3**, 155—159 (1934).

Verallgemeinerung der im Zbl. **9**, 403 referierten Resultate des Verf.

G. Cimmino (Napoli).

Kaltenborn, H. S.: Linear functional operations on functions having discontinuities of the first kind. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 702—708 (1934).

This paper gives the form of a linear continuous operation T on the linear space of all bounded functions $f(x)$, $a \leq x \leq b$, having at most discontinuities of the first kind, norm of the space being the least upper bound of $|f(x)|$ on (a, b) . It is found

that $T(f) = \int_a^b f d\psi + \sum_0^\infty (f(c_i) - f(c_i - 0)) \varphi(c_i)$, where $\psi(x)$ and $\varphi(x)$ are functions of bounded variation, $\varphi(x)$ vanishes excepting at a denumerable set of points, c_i are the points of discontinuity of f , and $\int f d\psi$ is the modification of the Stieltjes integral obtained by assuming that in the approximating sum $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\psi(x_i) - \psi(x_{i-1}))$ the points ξ_i are interior to the intervals (x_{i-1}, x_i) , and the limit is taken in the sense of successive subdivisions. — For the subspace of continuous functions, the wellknown Riesz formula results. It is pointed out that the Lebesgue-Stieltjes integral is inadequate.

T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

Ghermanesco, M.: Sur les équations fonctionnelles linéaires d'ordre infini. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 20, 89—92 (1934).

The Note deals along general lines (without proofs) with the functional equation of infinite order — generalization of equations in finite differences —

$$\overset{x}{E} F(x) = \sum_1^\infty c_n F(x - \lambda_n) = g(x) \quad (g(x) \text{ given}), \quad (1)$$

the constants c_n, λ_n being subject to certain general hypotheses. Thus, if

$$\sum |c_n| \text{ converges; } |\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| \rightarrow 0, \quad (A)$$

(1), with $g(x) = \sum_{m=0}^\infty g_m x^m$ and the g_m properly restricted, has for its principal solution

$$F(x) = \sum g_m G_m(x),$$

where the $G_m(x)$ are a certain class of Appell polynomials — solutions of the particular equation

$$\overset{x}{E} G_m(x) = x^m.$$

Another case, to which the ordinary methods of finite differences equations are not applicable, is the following:

$$\sum c_n \text{ diverges; } 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty; \quad (B)$$

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \rightarrow 0, \quad \frac{\log |c_n|}{\lambda_n} = C.$$

This is illustrated by the equation

$$\overset{x}{E} F(x) = e^{\xi x} \quad (2)$$

(more generally: $\overset{x}{E} F(x) = \sum Q_m(x) e^{\xi_m x}$; $Q_m(x)$ — polynomials in x).

(2) in general has no solution, if $R(\xi) \leq C$; if $R(\xi) > C$ and ξ is a zero of multiplicity m for $f(x) = \sum_1^\infty c_n e^{-\lambda_n x}$, its principal solution is

$$F(x) = (-1)^m \frac{x^m e^{\xi x}}{f^{(m)}(\xi)}.$$

We may study (1), combining (A) and (B). — The author remarks further that reading (1) from right to left, we may interpret its solution as equivalent to finding, for a given $g(x)$, a functions $F(x)$ and a set of constants c_n, λ_n (they may be given in some particular cases), so that the following expansion holds:

$$g(x) = \sum_1^\infty c_n F(x - \lambda_n).$$

Thus, if the given constants c_n, λ_n satisfy (A), then

$$x^m = \sum_1^\infty c_n G_m(x - \lambda_n).$$

J. Shohat (Philadelphia).

Funktionentheorie:

Doob, J. L., and B. O. Koopman: On analytic functions with positive imaginary parts. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 601—605 (1934).

Verf. leiten zunächst aus der Herglotzschen Darstellung einer im Einheitskreise regulären Funktion mit positivem Imaginärteil durch ein Stieltjes-Poissonsches Integral den Satz her: Ist $\varphi(l)$ in $\Im l > 0$ regulär und ist dort $\Im \varphi(l) \geq 0$, ist ferner $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \Im \varphi(it) = a < \infty$, so gibt es eine in $-\infty < \lambda < \infty$ nicht abnehmende, von rechts stetige Funktion $\alpha(\lambda)$ mit $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \alpha(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha(\lambda) \leq a$ derart, daß in $\Im l > 0$ gilt:

$$\varphi(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(\lambda)}{\lambda - l} + \text{konst.}$$

Als Anwendung dieses Satzes wird sodann eine neuartige und einfache Herleitung der (bekannten) analytischen Darstellung der Resolvente einer selbstadjungierten Transformation in einem abstrakten Hilbertschen Raume gegeben. *S. Warschawski.*

Dinghas, Alexander: Über einen Satz von Phragmén und Lindelöf. Math. Z. **39**, 455—461 (1934).

Folgende Verallgemeinerung des Phragmén-Lindelöfschen Prinzips wird bewiesen: Es gibt keine ganze Funktion, welche im Innern eines Winkels von der Öffnung $< \frac{\pi}{\varrho}$ der Bedingung $\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z)|}{|z|^\varrho} > 0$ genügt, während auf den Schenkeln $\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z)|}{|z|^\varrho} = 0$ gilt. Der Beweis wird mit Hilfe der Carlemanschen Ungleichung geführt. — Zum Schluß wird die Milloux'sche Verallgemeinerung dieser Ungleichung besprochen.

Ahlfors (Helsingfors).

Rauch, A.: Cas où une direction de Borel d'une fonction entière $f(z)$ d'ordre fini est aussi direction de Borel pour $f'(z)$. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 1014—1016 (1934).

Es bezeichne $\varrho(\varphi_0, \varepsilon, a)$ den Grenzexponenten für die Reihe $\sum |a_\nu|^{-\lambda}$ aus den a_ν -Stellen der meromorphen Funktion $f(z)$, die dem Winkelraum $|\arg z - \varphi_0| < \varepsilon$ angehören; für $\varepsilon \rightarrow 0$ strebt $\varrho(\varphi_0, \varepsilon, a)$ monoton (abnehmend) einem Grenzwert $\varrho(\varphi_0, a)$ zu. Valiron [C. R. Acad. Sci., Paris **192**, 269 (1931); dies. Zbl. **1**, 21] zeigte, daß es zu jeder Richtung φ_0 einen mittleren Grenzexponenten $\varrho(\varphi_0)$ gibt, der von $\varrho(\varphi_0, a)$ für höchstens 2 Aufnahmewerte unterschritten und für höchstens eine Menge vom Maß Null überschritten werden kann, wenn $\varrho(\varphi_0)$ die Wachstumsordnung ϱ von $f(z)$ nicht erreicht. — Der Verf. ergänzt diesen Satz, indem er bei ganzen Funktionen eine Aussage über Ableitungsfestigkeit des mittleren Grenzexponenten $\varrho(\varphi_0)$ macht: Ist nämlich wirklich ein Ausnahmewert a mit $\varrho(\varphi_0, a) < \varrho(\varphi_0)$ vorhanden, so ist der mittlere Grenzexponent der Ableitung, $\varrho'(\varphi_0)$, gleich $\varrho(\varphi_0)$. Für jedes $f(z)$ von der Ordnung ϱ erreicht für wenigstens eine Richtung φ_0 der mittlere Grenzexponent seine obere Grenze ϱ (sog. Borelsche Richtung zur Ordnung ϱ ; Valiron, Acta math. **52**). Gibt es dann für $f(z)$ einen starken Ausnahmewert (im Sinne von Picard oder Borel), so ist jede Borelsche Richtung der Ordnung ϱ von f zugleich eine solche für f' . — Verf. spricht seine Sätze nur für ganze Funktionen aus. Die Methoden des Ref. (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1929**) gestatten die Übertragung auf meromorphe Funktionen; man muß da zwei starke Ausnahmewerte voraussetzen. *Ullrich.*

Ketchum, P. W.: Expansions of two arbitrary analytic functions in a series of rational functions. Ann. of Math., II. s. **35**, 759—766 (1934).

Man kennt Reihen, die in getrennten Gebieten gegen verschiedene analytische Funktionen konvergieren. Verf. gibt hier eine Gattung von Reihen an, die nach rationalen Funktionen fortschreiten, ein den Potenzreihen sehr ähnliches Konvergenzverhalten zeigen, und mit deren Hilfe man 2 beliebig gegebene und bei $z = 0$ bzw. ∞ regulär analytische Funktionen in Umgebungen dieser beiden Stellen zugleich durch

eine Reihe darstellen kann. Gibt es eine Konvergenzstelle $\zeta \neq 0$, $|\xi| < 1$, so konvergiert die Reihe jedenfalls in den Kreisen $|z| < |\zeta|$ und $|z| > 1/|\zeta|$. Ihr Konvergenzgebiet ist i. a. durch die 0 bzw. ∞ nächstgelegene singuläre Stelle der darzustellenden Funktionen bereits bestimmt, jedenfalls aber ist es durch den Einheitskreis zerlegt. Verf. gibt sogar eine ganze Klasse von Funktionenfolgen F_n an, nach denen solche Entwicklungen möglich sind; sie haben die Form

$$a_0 F_0 + b_0 z F_0 + a_1 F_1 + b_1 z F_1 + \dots,$$

wo speziell $F_n = z^n / (1 - z^{2n+1})$ die einfachste Folge ist. *Ullrich* (Göttingen).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Blume, Hans: Mathematische Begründung und Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsrechnung mit finiten Kollektiven. *Z. Physik* **92**, 232—252 (1934).

Weiterentwicklung der vom Verf. in seiner Dissertation (vgl. dies. Zbl. **10**, 69) angedeuteten Wahrscheinlichkeitstheorie. — Die vom Ref. a. a. O. geäußerten Bemerkungen bleiben in Kraft. Hinzuzufügen ist, daß der Annäherungsgrad auch beliebig hoch gedacht werden kann; die Theorie wird dadurch stichhaltig, fällt jedoch mit der v. Misesschen Theorie vollständig zusammen; der Unterschied betrifft nur die Ausdrucksweise, indem alle Limesbeziehungen trivialerweise durch entsprechende ε -Formulierungen ersetzt werden.

A. Khintchine (Moskau).

Arany, Daniel: Le problème des parcours. (57. sess., Chambéry, 24. VII.—4. VIII. 1933.) *Assoc. Franç. Avancement Sci.* 20—23 (1933).

Vgl. dies. Zbl. **8**, 23.

Haviland, E. K.: On the theory of absolutely additive distribution functions. *Amer. J. Math.* **56**, 625—658 (1934).

Der Verf. gibt eine strenge Begründung der üblichen statistischen Methoden für n -dimensionale Verteilungsfunktionen. Die Radonsche Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen und der Stieltjes-Radonsche Integralbegriff bilden hierzu die Grundlage. Der Verf. begründet insbesondere den sog. fundamentalen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ein Kriterium für die Bestimmtheit des Momentenproblems, die Faltung von Verteilungsfunktionen sowie die, aus dem 1-dimensionalen Fall bekannte, vektorielle Addition der „Spektren“ von Verteilungsfunktionen bei deren Faltung. Besonders hervorgehoben sei das Bestimmtheitskriterium: Die Momente $\mu_{p,q} = M(p, q; \Phi)$ einer 2-dimensionalen Verteilungsfunktion Φ bestimmen dieselbe eindeutig, falls

$$\left\{ \sum_{\nu=0}^{2m} \binom{2m}{\nu} |\mu_{2m-\nu, \nu}| \right\}^{\frac{1}{2m}} = o(m).$$

Dieser Satz wird falsch, wenn man hier $o(m)$ durch $o(m^{1+\varepsilon})$ mit noch so kleinem $\varepsilon > 0$ ersetzt. Der überraschend einfache Beweis dieses Satzes beruht auf der eindeutigen Bestimmbarkeit einer Verteilungsfunktion durch ihre Fouriertransformierte.

I. J. Schoenberg (Princeton).

Eyraud, Henri: Sur la valeur la plus précise d'une distribution. *C. R. Acad. Sci., Paris* **199**, 817—819 (1934).

Eine stetige zufällige Variable x habe die Verteilungsfunktion $u(x)$. Der Ausdruck

$$v_{rs}(x) = \frac{n!}{r! s!} \int_0^u u^r (1-u)^s du; \quad s = n - r - 1$$

liefert alsdann die Verteilungsfunktion des größten unter den $r+1$ kleinsten Werten von n Beobachtungen von x . Von diesem Ausdruck ausgehend erhält der Verf. asymptotische Darstellungen für V_{rs} in den Fällen: 1. s und n von gleicher Ordnung; 2. s von geringerer Ordnung als n . Vgl. hierzu: Haag, *C. R. Acad. Sci., Paris* **179**, 1388 (1924) und Gumbel, *C. R. Acad. Sci., Paris* **197** (1933) (dies. Zbl. **8**, 25).

Lüneburg (Leiden).

Jordan, Ch.: Le théorème de probabilité de Poincaré, généralisé au cas de plusieurs variables indépendantes. Acta Litt. Sci. Szeged 7, 103—111 (1934).

Verf. betrachtet folgendes Problem. Es werden n unabhängige Versuche gemacht, für deren Ergebnis m verschiedene Möglichkeiten, mit konstanten Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_m , in Betracht kommen. Für $n \geq m$ ist es möglich, daß jede dieser Möglichkeiten wenigstens in einem der n Versuche realisiert ist. Es wird die Wahrscheinlichkeit P hierfür berechnet und es ergibt sich

$$P = 1 - \sum_i (1 - p_i)^n + \sum_{i,j} (1 - p_i - p_j)^n - \dots + (-1)^m (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_m)^n.$$

Für $m = 1$ ist offenbar $P = 1 - (1 - p)^n$; wenn $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 1/m$, ist

$$P = m! m^{-n} \mathfrak{S}_n^m \left(\mathfrak{S}_n^m = \frac{1}{m!} [A^m x^n]_{x=0} = \text{Stirlingsche Zahl 2. Art} \right). \quad \text{de Finetti.}$$

Slade, J. J.: An asymmetry probability function. Proc. Amer. Soc. Civil Engr. 60, 1097—1123 (1934).

The frequency function "introduced" in this paper is the well-known logarithmic-normal function [cf. e. g., P. T. Yuan, On the logarithmic frequency distribution, etc. Ann. Math. Statistics 4, 30—74 (1933); this Zbl. 6, 359] with a new choice of parameters. That is, if it be assumed that $\log(x + b)$ be normally distributed with mean m and variance σ^2 , then on writing $\log d = \sigma^2 - m$, the form given results. The author discusses this frequency function in terms of his new parameters, giving three numerical examples. Cecil C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Doob, J. L.: Probability and statistics. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 759—775 (1934).

Die Arbeit enthält eine strenge Begründung der bekannten von R. A. Fisher herrührenden „method of maximum likelihood“. Unter gewissen Annahmen allgemeiner Natur wird bewiesen: 1. daß die durch die Methode gelieferten „estimates“ gegen die richtigen Werte im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung konvergieren; 2. daß sie näherungsweise einer Gaußschen Verteilung unterliegen, deren Streuung sich explizit angeben läßt. Als mathematische Grundlage der Beweise benutzt Verf. die Theorie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen in unendlichdimensionalen Räumen; der dieser Theorie gewidmete § 1 enthält auch an sich wichtige und interessante Ergebnisse.

A. Khintchine (Moskau).

● **Darmois, Georges:** Statistique et applications. (Collect. Armand Colin. Sect. de math. Nr. 174.) Paris: Armand Colin 1934. 203 S. et 32 Fig. Frs. 10.50.

Das Büchlein ist als erste Einführung in die Probleme und Forschungsmethoden der Angewandten Statistik gedacht und enthält daher keine im eigentlichen Sinne mathematischen Ausführungen. Es wird aber oft sehr willkommen sein, als vielseitige und doch handliche Übersicht über die Arbeitsweise und die Erfolge der Statistik in den verschiedensten Gebieten, von der Bevölkerungskunde bis zur Astronomie.

Willy Feller (Stockholm).

Schelling, Hermann von: Die Konzentration einer Verteilung und ihre Abhängigkeit von den Grenzen des Variationsbereiches. Metron 11, Nr 4, 3—17 (1934).

Bei statistischen Untersuchungen, namentlich in der Einkommenstatistik, ist es oft wichtig, einen Teil des Variationsbereiches einer Verteilung zu bestimmen, z. B. das Gesamteinkommen von Zensiten, auf die ein Einkommen bis zu einer bestimmten Höhe entfällt. Um dergleichen Verteilungen (z. B. die Gleichmäßigkeit bzw. Ungleichmäßigkeit der Einkommensverteilung in verschiedenen Ländern) miteinander vergleichen zu können, braucht man eine Maßzahl. Diese wird als Konzentrationsmaß bezeichnet, weil sie die Konzentration der unabhängigen Veränderlichen charakterisiert. Bezeichnet man mit x die unabhängige Veränderliche einer Verteilung $\varphi(x)$, so kann man stets den Durchschnitt \bar{x} derjenigen Werte der Veränderlichen bilden, die größer als x sind. In der Gleichung $\bar{x} : x = 1 - f(x)$ charakterisiert die Funktion $f(x)$ die Konzentration der Ausgangsverteilung. Der Autor sucht nun nachzuweisen, daß mit Hilfe einer einzigen Quadratur oder durch ein immer ausführbares

Rekursionsverfahren es möglich ist, bei Kenntnis des Verlaufes von $\bar{x} : x = 1 - f(x)$ die Verteilung $q(x)$ selbst zu bestimmen. Die sog. Paretsche Verteilung erweise sich dabei als Spezialfall, bei dem das Konzentrationsmaß von einer der Grenzen des Variationsbereiches unabhängig ist. Infolgedessen lasse sich in diesem Falle die Konzentration der Gesamtverteilung aus jedem nach unten beliebig begrenzten Abschnitt berechnen. Zur Illustration der abgeleiteten Formeln wird die Einkommensverteilung der natürlichen Personen im Deutschen Reiche nach der Finanzstatistik für 1926 analysiert. Die Darlegungen des Verf. zeichnen sich durch Einfachheit und Klarheit aus.

Eugen Altschul (Minnesota, USA.).

Eyraud, H.: Sur quelques lois d'erreurs analogues aux erreurs systématiques. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 763—764 (1934).

The author considers sets of observed values of a statistical variable in which the most probable value is known not to be the mean. If n values are in order according to magnitude, if $0 < p < 1$, and if it be assumed that the most probable value falls in the interval between the np -th and the $(np + 1)$ -st values (np being an integer) the author gives the frequency functions for the error, positive or negative, which he states he has derived by an analysis quite similar to that of Gauss. He also remarks that the limiting form for $p = 1$, (in which case the largest observed value is the most probable) has a proper sense.

Cecil C. Craig (Ann Arbor, Michigan).

Pollard, Harry S.: On the relative stability of the median and arithmetic mean, with particular reference to certain frequency distributions which can be dissected into normal distributions. Ann. math. Statist. 5, 227—262 (1934).

Fisher, R. A.: Randomisation, and an old enigma of card play. Math. Gaz. 18, 294 bis 297 (1934).

Latycheva, K.: Sur quelques schémas d'urnes pour l'explication d'une corrélation normale. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 71—75 (1934) [Ukrainisch].

Tardini, Luigi Lorenzo: La dimostrazione analitica dei teoremi edonistici di Gossen. Atti Mem. Accad. Sci. Modena, IV. s. 4, 77—80 (1934).

Es wird eine Herleitung des erstmalig von Gossen aufgestellten „Grenznutzen-niveaugesetzes“ der mathematischen Nationalökonomie angegeben. Die Voraussetzungen, von denen ausgegangen wird, weichen ein wenig von den üblichen ab.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Koeppler, Hans: Das zweiändige Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen der Prämienreserve eines Bestandes von Versicherungen mit verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten. Aktuár. Vědy 4, 124—134 u. 163—169 (1934).

Gumbel, E. J.: Le paradoxe de l'âge limite. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 918—920 (1934).

Aus bestimmten Annahmen ergibt sich, daß die mathematische Erwartung des höchsten Todesalters bei Sterblichkeitsuntersuchungen mit dem „Typus“ der Todesverteilung (d_x) nicht zu wachsen braucht.

Herman Wold (Stockholm).

Geometrie.

● **Beutel, Eugen:** Die Quadratur des Kreises. 3. Aufl. (Math.-physik. Bibl. Reihe 1, Nr. 12.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1934. 60 S. u. 11 Fig. RM. 1.20.

Ocagne, M. d': Étude rationnelle du problème de la trisection de l'angle. Enseignement Math. 33, 49—63 (1934).

Thébault, V.: Cercles associés à un triangle. Gaz. mat. 40, 49—52 (1934).

Clemow, J.: A note on isogonal conjugates. Math. Gaz. 18, 289—293 (1934).

Einfache Ableitung der bekannten Eigenschaften der Isogonalverwandtschaft für das ebene Dreieck.

O. Bottema (Sappemeer-Niederlande).

● **Castelnuovo, Guido:** *Lezioni di geometria analitica*. 8. ediz. *Geometria analitica del piano e dello spazio. I concetti fondamentali della geometria proiettiva. Curve e superficie di secondo ordine*. Roma: Albrighi, Segati e C. 1935. VIII, 605 S. u. 8 Fig. L. 35.—.

Gibbins, N. M.: *Generalisation of Plücker's theorem*. *Math. Gaz.* 18, 315—320 (1934).

The following theorem of Plücker is meant: the director circles of the conics touching 4 given lines form a coaxial system, of which the radical axis is the directrix of the parabola of the range and the limiting points are the centres of the rectangular hyperbolas of the range. The author proves a theorem of projective geometry, which reduces to Plücker's theorem if two well-defined points are taken as circular points at infinity. Consequences of the theorem.

O. Bottema (Sappemeer-Niederlande).

Ramamurti, B.: *On a cubic transformation in circle-geometry*. *J. Annamalai Univ.* 3, 194—201 (1934).

In der Gaußschen Ebene seien vier Punkte A_i vorgegeben. Ein Punkt P wird mit A_0A_1 und A_2A_3 durch je einen Kreis verbunden. Die Verbindungskreise schneiden sich zum zweiten Male in P' . Gegenstand der Untersuchung ist die involutorische Verwandtschaft T_1 zwischen P und P' . Sie läßt sich aus einer, von Vaidyanathaswamy untersuchten, kubischen Transformation I' [bei der Abbildung der Ebene auf die Fläche 2. Ordnung $a_1(x_0x_1 + x_2x_3) + a_2(x_0x_2 + x_3x_1) + a_3(x_0x_3 + x_1x_2) = 0$ gibt sie die Verwandtschaft: $x'_i = 1 : x_i$] und der durch die Punktepaare A_0A_1 und A_2A_3 bestimmten, mit I' vertauschbaren Involution J_1 zusammensetzen. I' erzeugt mit J_1, J_2, J_3 eine Abelsche Gruppe g_8 , welche drei Vierergruppen vom Typus E, J, T_2, T_4 enthält. Jede dieser Gruppen leitet aus einem Punkte vier andere her, die zusammen mit den Basispunkten A_i eine Miquelsche Konfiguration bilden. Der Ort der Ruhepunkte der Transformation T_1 ist eine Zyklik von besonderer Art: Bei der Abbildung der Ebene auf die Fläche 2. Ordnung wird ihr Bild eine C^4 , die ∞^1 geschlossene Vierecke von Erzeugenden zuläßt. Bestimmung von Zykliks, die als Ganzes Transformationen von g_8 gegenüber invariant sind.

E. A. Weiss (Bonn).

Reidemeister, Kurt: *Geometria proiettiva non euclidea*. *Rend. Semin. mat. Fac. Sci. Univ. Roma*, III. s. 1, Pt. 2, 219—228 (1934).

Mit Hilfe der Bewegungen einer Ebene in sich werden die Elemente eines dreidimensionalen Raums erklärt — ein Punkt als eine gleichsinnige Bewegung, eine Gerade als eine Gruppe von Drehungen, eine Ebene als eine Klasse von Bewegungen, darstellbar als Produkt einer festen gleichsinnigen Bewegung und einer beliebigen Geradenspiegelung. Dann gelten in diesem Raum nach geeigneten Inzidenzdefinitionen die gewöhnlichen Verknüpfungssätze und folglich der Satz des Desargues im Bündel (und in der Ebene). Der Satz des Pascal folgt nach Dandelin-Schur aus der Existenz der beiden Geradenscharen auf einem einschaligen Rotationshyperboloid in diesem Raum. Die absolute ebene projektive Geometrie, auf deren Begründung es hier ankommt, erscheint bei dieser Abbildung der Raumelemente auf die ebenen Bewegungen als das Bild des Bündels der Geraden und Ebenen durch den Punkt, der der Identität zugeordnet ist. — Vgl. die hieran anschließende Arbeit von Podehl und Reidemeister: „Eine Begründung der ebenen elliptischen Geometrie“ [*Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* 10, 231—255 (1934); s. dies. Zbl. 9, 177].

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Haupt, Otto: *Über ordnungsfeste Annäherung ebener Bogen*. *S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss.* 1934, 1—22 (Abh. 7).

Es sei \mathfrak{B} ein beschränkter ebener Bogen der Ordnung $n \geq 2$ ohne Streckenteilbogen. Die ε -Umgebung eines Punktes P bedeutet die offene Kreisscheibe vom Halbmesser ε um P als Mittelpunkt. Die ε -Nachbarschaft $N(\mathfrak{B}, \varepsilon)$ von \mathfrak{B} bedeutet die Vereinigung der ε -Umgebungen aller Punkte von \mathfrak{B} . Unter einer ε -Näherung von \mathfrak{B} wird

ein Bogen \mathfrak{A} von folgenden Eigenschaften verstanden: 1. \mathfrak{A} liegt in $N(\mathfrak{B}, \varepsilon)$; 2. \mathfrak{B} liegt in $N(\mathfrak{A}, \varepsilon)$; 3. zu irgendeinem Teilbogen \mathfrak{B}' von \mathfrak{B} gibt es einen Teilbogen \mathfrak{A}' von \mathfrak{A} derart, daß \mathfrak{A}' in $N(\mathfrak{B}', \varepsilon)$ und \mathfrak{B}' in $N(\mathfrak{A}', \varepsilon)$ liegt. Durch eine ε -Näherung \mathfrak{A} wird \mathfrak{B} überall „ ε -gleichmäßig“ approximiert. Der Hauptsatz des Verf. ist der folgende: Jeder beschränkte ebene Bogen \mathfrak{B} der Ordnung n läßt sich ordnungsfest und ε -gleichmäßig durch einen von Spitzen freien, reellen Teilbogen \mathfrak{A} einer algebraischen Kurve approximieren. (Dabei kann \mathfrak{A} so gewählt werden, daß die Endpunkte von \mathfrak{A} mit den Endpunkten von \mathfrak{B} zusammenfallen und daß \mathfrak{A} und \mathfrak{B} in den gemeinsamen Endpunkten gleiche Tangenten besitzen). Ferner kann jede beschränkte ebene geschlossene (und keine Strecke enthaltende) Kurve n -ter Ordnung ordnungsfest und ε -gleichmäßig approximiert werden durch geschlossene Kurven ohne Spitzen, welche, wenn auch nicht gerade algebraisch, so doch wenigstens analytisch sind. Im Sinne dieses Satzes werden also alle Konfigurationen bei beschränkten ebenen Bogen und Kurven n -ter Ordnung im wesentlichen bereits durch algebraische Bogen und analytische Kurven geliefert. — Dieser Satz ist eine weitgehende Verallgemeinerung eines Satzes von C. Juel [Danske Vid. Selsk., Skr., 7. R., 11, Nr2, 123 u. 129 (1914)]. Für den Fall, daß der vorgegebene Bogen bzw. die vorgegebene Kurve stückweise konvex ist und stückweise eine stetige Tangente besitzt, hat nämlich Juel gezeigt, daß der Bogen bzw. die Kurve durch stückweise konvexe, von Spitzen freie Bogen bzw. Kurven mit überall stetiger Tangente ordnungsfest und gleichmäßig beliebig genau approximiert werden kann.

Sz. Nagy (Szeged).

Algebraische Geometrie:

Deaux, R.: Sur un faisceau ponctuel de cubiques nodales. Mathesis 48, 382—387 (1934).

Du Val, Patrick: On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction. I. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 453—459 (1934).

Notwendig und hinreichend, daß eine isolierte singuläre Stelle einer algebraischen Fläche den adjungierten Flächen keine Bedingung auflegt, ist, daß die Vielfachheit des Punktes gleich 2 ist und daß alle seine Umgebungen (1., 2., ... Ordnung) rational sind. Werden diese Umgebungen durch birationale Transformationen in Kurven transformiert, so entsteht ein zusammenhängender „Baum“ von Kurven vom virtuellen Grade — 2. Es gibt nur wenige Arten von Bäumen, welche imstande sind, die Umgebungen eines Doppelpunktes darzustellen, nämlich die folgenden: 1. Eine einzige Kette von S Kurven R_1, R_2, \dots, R_n , wo $R_i R_{i+1}$ trifft, und wo R_1 und R_n die Umgebung 1. Ordnung bilden; 2. eine Kurve O , an der sich 3 Ketten von n, p und q Kurven anschließen, wobei entweder $p = q = 1$, n beliebig, oder $(n, p, q) = (2, 2, 1), (3, 2, 1)$ oder $(4, 2, 1)$ sein kann. Die zugehörigen Singularitäten werden noch näher charakterisiert.

van der Waerden (Leipzig).

Du Val, Patrick: On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction. II. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 460—465 (1934).

Dans la première partie de ce travail [Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 453 (1934); v. le réf. préc.] l'a. a étudié la nature des points singuliers isolés d'une surface algébrique, qui ne présentent aucune condition pour l'adjonction et, par conséquent, qui n'ont pas d'influence dans le calcul du genre arithmétique de la surface. L'a. constate maintenant qu'il y a un lien étroit entre les résultats qu'il a obtenus sur le sujet, et les résultats de H. S. M. Coxeter [J. London Math. Soc. 6, 132 (1931), ce Zbl. 1, 264; Ann. of Math. 35, 588 (1934), ce Zbl. 10, 11] concernant les groupes engendrés par des réflexions. Dans le cas des surfaces rationnelles l'a. donne une justification de ce rapprochement, moyennant les considérations suivantes. — Une surface rationnelle, F , se représente sur le plan avec un système linéaire de courbes, ayant un certain nombre n de points base P . Aux courbes exceptionnelles de ce système linéaire, c'est-à-dire aux courbes ayant des points

multiplés assignés parmi les points P et dont les caractères virtuels ont des valeurs opportunes, l'a. associe (d'une façon pas trop claire) les sommets d'un polytope de S_n ; et cela de sorte que chaque symétrie transformant le polytope en sois-même, correspond à une transformation cremonienne (virtuelle) du plan, ayant ses points fondamentaux parmi les points P , et réciproquement. En correspondance aux points singuliers de F ne présentant aucune condition pour l'adjonction, on obtient ainsi précisément un sousgroupe du groupe des symétries qui opère sur le polytope. En outre l'a. donne, avec une démonstration à peine esquissée, la proposition suivante: Le cosinus de l'angle compris entre deux hyperplans de symétrie du polytope est la moitié du nombre virtuel des points, suivants lesquels se rencontrent les deux courbes virtuelles (de degré -2 et genre 0) qui correspondent sur le plan aux deux symétries envisagées.

Beniamino Segre (Bologna).

Du Val, Patrick: On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction. III. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 483—491 (1934).

Le groupe des symétries du polytope considéré dans le travail précédent, est fini pour $n < 9$ et infini pour $n \geq 9$. Ici l'a. étudie, avec quelques détails, les cas où il est $n < 9$.

Beniamino Segre (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces de genres un de l'espace à six dimensions. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **3**, 152—155 (1934).

Nach P. Du Val (Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 276—279; dies. Zbl. **4**, 161) ist eine Fläche F mit Geschlechtern 1 ($p_a = P_4 = 1$) des Raumes S_6 im allgemeinen vollständiger Schnitt von 6 quadratischen Hyperflächen. Nun wird bewiesen, daß man die Fläche F folgendermaßen erhalten kann: Man betrachte drei quadratische Hyperflächen des S_6 , die sich in einer V_3^8 schneiden und von denen zwei einen S_3 gemeinsam haben. Eine Hyperebene durch diesen S_3 schneidet V_3^8 außer in diesem S_3 noch in einer Fläche V_3^2 . Eine quadratische Hyperfläche durch diese V_3^2 schneidet V_3^8 außerdem in einer Fläche $F = V_2^{10}$. Diese ist die gesuchte. *van der Waerden.*

Godeaux, Lucien: Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls, et de genre linéaire un. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **3**, 184 bis 187 (1934).

Differentialgeometrie:

Sintsov, D. M.: Sur l'axe de déviation (normale affine). Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **8**, 33—36 (1934).

L. Carnot hatte (Géométrie de position, 1803) die Aufgabe behandelt, die Affinnormale einer ebenen Kurve zu bestimmen. Carda [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **28**, 78—80 (1919)] hat auf die Unrichtigkeit des Carnotschen Ergebnisses hingewiesen und die Aufgabe auf neuem Wege gelöst. Verf. gibt eine berichtigte Darstellung der Carnotschen Herleitung.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Finikoff, S.: Couples des surfaces dont les asymptotiques correspondent et les tangentes asymptotiques homologues se coupent. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 164—168 (1934).

Es werden Verwandtschaften zwischen zwei Flächen (x) und (x_3) untersucht, bei denen die asymptotischen Linien der beiden Flächen einander entsprechen so, daß entsprechende asymptotische Tangenten sich schneiden. Es kommt ein trivialer Fall vor, wo (x) und (x_3) zentrisch kollinear sind. Wenn man diesen Fall ausschließt, so hängt die Fläche (x) von acht willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab. Die Fläche (x_3) ist im allgemeinen durch die Fläche (x) eindeutig bestimmt; eine einzige Ausnahme entsteht in dem Falle, wo (x) eine Regelfläche ist. Es wird auf den speziellen, von Godeaux untersuchten Fall hingewiesen, wo die beiden Flächen (x) und (x_3) dieselben Lieschen F_2 haben.

Čech (Brno).

Mayer, Octave: *Géométrie centro-affine différentielle des surfaces*. Ann. Sci. Univ. Jassy 21, 1—77 (1934).

Die Gesamtheit aller projektiven Transformationen des Raumes, die einen Punkt O (Zentrum) und eine Ebene W (uneigentliche Ebene) fest lassen, bildet die zentro-affine Gruppe. Verf. entwickelt im I. Teil die vollständige Flächentheorie dieser Gruppe. Bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt das Zentrum ist, wird die Fläche gleichzeitig durch eine Parameterdarstellung ihrer Punkt- und Ebenenkoordinaten gegeben. Die Diff.-Geom. wird auf eine quadratische Grundform F und eine kubische Φ aufgebaut. Durch $F = 0$ werden die Asymptotenlinien gegeben. Die Formen F und Φ , zwischen deren Koeffizienten 4 Integrabilitätsbedingungen bestehen, bestimmen die Fläche vollständig bis auf zentro-affine Transformationen. — Verf. bestimmt nun ein vollständiges Invariantensystem der Grundformen; von besonderer Bedeutung sind dabei die 3 absoluten Invarianten J, K, K_1 und 2 Linearformen, deren Nulllinien die Hauptlinien I. und II. Art genannt werden. — Die geometrische Deutung der Invarianten gelingt mit Hilfe der Schmiegflächen 2. Grades. Die Schnittkurve der Schmieg- F_2 , deren Mittelpunkt das Zentrum O ist, mit der gegebenen Fläche hat im betrachteten Flächenpunkt einen 3fachen Punkt, für dessen 3 Tangenten $\Phi = 0$ ist. Nach interessanten Untersuchungen über die „asymptotischen Regelflächen“, über die Affin-Normale und ihr duales Analogon, die Zentral-Normale, sowie der affinen und zentralen Krümmungslinien, schließt der I. Teil mit einer Verallgemeinerung des Parallelismus von Levi-Civita. — Im II. Teile werden 8 spezielle Flächenklassen untersucht. 1. Die Flächen von Tzitzéica, für die eine der Linearformen identisch verschwindet und F und Φ apolar sind. Jede dieser Eigenschaften ist kennzeichnend. 2. Die Flächen, deren Hauptlinien Asymptotenlinien sind. 3. Zentro-affine Minimalflächen. Dazu kommen unter anderem die 3 Flächenklassen, für die $J = 0$ oder $J = 1$ oder $J = K = 0$ ist. — Der III. Teil bringt eine vollständige Theorie der Regelflächen. Eine Regelfläche wird durch 2 (duale) Leitlinien aufgespannt: die uneigentliche Kurve und die Zentralkurve; darunter wird die Berührungskurve des Tangentenkegels mit der Spitze O verstanden. Nach der Festlegung eines Invariantenparameters (zentro-affine Bogenlänge) wird gezeigt, daß eine Regelfläche im allgemeinen durch 3 Invarianten vollständig bis auf zentro-affine Transformationen bestimmt ist. Im folgenden werden die Grundformen F und Φ der Regelflächen berechnet, ein begleitendes Koordinatensystem wird aufgestellt und ein Ausnahmefall behandelt. Den Schluß bildet die Untersuchung einer speziellen Flächenklasse. Haack (Danzig).

MacQueen, M. L.: A projective generalization of metrically defined associate surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 826—840 (1934).

Deux surfaces S_x, S_y sont dites projectivement parallèles si la droite qui joint leurs points correspondants x, y est une normale projective de chaque surface et la ligne d'intersection des plans tangents homologues est située dans un plan fixe. Elles sont projectivement associées si de plus les asymptotiques d'une surface correspondent à un système conjugué de l'autre et vice-versa. Si la droite xy décrit une congruence conjuguée à S_x, S_y sans être leur normale projective, les deux surfaces sont associées au sens généralisé. Quoi qu'il soit, les points x, y divisent harmoniquement les foyers de xy et les développables de la congruence (xy) interceptent sur S_x, S_y des réseaux conjugués aux invariants ponctuels égaux. S. Finikoff (Moscou).

Topologie:

Zaremba, S. K.: Sur la variation de la tangente à une courbe fermée simple de Jordan. Ann. Soc. Polon. math. 12, 55—56 (1934).

Zaremba, S. K.: Sur une application de la notion d'ordre d'une trajectoire par rapport à une courbe. Ann. Soc. Polon. math. 12, 108—109 (1934).

γ sei eine geschlossene Jordankurve (in der Ebene), τ irgendeine geschlossene stetige Kurve, welche γ nicht trifft, ferner seien γ und τ auf denselben Parameter

bezogen und C , T sei das laufende Paar entsprechender Punkte. Wenn C die Kurve γ einmal durchläuft, nimmt der Winkel, den die (orientierte) Gerade CT mit einer festen Richtung bildet, um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π zu. Man gewinnt hieraus einige bekannte Sätze als Spezialfälle, z. B. der Winkel, den die Tangente einer stetig differenzierbaren Jordankurve mit einer festen Richtung bildet, ändert sich bei einmaligem Umlauf des Berührungspunktes um $\pm 2\pi$. Ferner bekommt man Aussagen folgender Art: Sind γ und γ' geschlossene eindeutig aufeinander bezogene Jordankurven und liegt bei Beginn einer stetigen Deformation (während derselben sollen die Kurven eindeutig aufeinander bezogen bleiben) eine Kurve ganz in der anderen und am Schluß jede ganz außerhalb der anderen, so fällt zwischenrein wenigstens einmal ein Punkt von γ mit dem entsprechenden Punkt von γ' zusammen.

H. Busemann (Kopenhagen).

Kerékjártó, B. von: Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich. Acta Litt. Sci. Szeged 7, 65—75 (1934).

In einer früheren Arbeit [Acta Litt. Sci. Szeged 6, 235—262 (1934); dies. Zbl. 8, 372] hat Verf. die linearen Selbstabbildungen der Zahlenkugel topologisch charakterisiert als diejenigen topologischen Selbstabbildungen mit Erhaltung der Orientierung, die, abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmepunkten, überall regulär sind (über den Begriff der regulären Abbildung vgl. das Referat der genannten Arbeit). Es werden nun die regulären Selbstabbildungen T einer beliebigen orientierbaren geschlossenen Fläche F vom Geschlecht p betrachtet, und es wird gezeigt, daß eine reguläre Abbildung der Fläche F in der universellen Überlagerungsfläche Φ eine ebenfalls reguläre Abbildung τ induziert, bei Zugrundelegung der hyperbolischen ($p > 1$) bzw. euklidischen ($p = 1$) Metrik in Φ . Hat insbesondere T einen Fixpunkt, so gilt gleiches von τ . Durch Schließung von Φ mit einem uneigentlichen Punkt wird τ zu einer topologischen Selbstabbildung der Kugelfläche, die auf Grund der früheren Arbeit des Verf. einer Drehung homöomorph sein muß. τ und daher auch T ist also periodisch. Führt die reguläre Abbildung T jeden Rückkehrschnitt in einen homotopen über, so kann man im Falle $p > 1$ nach dem Birkhoffschen Fixpunktsatz auf einen Fixpunkt, also auf die Periodizität von T schließen. Verf. beweist aber sogar die folgende Verschärfung: Eine reguläre Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich selbst, die jeden Rückkehrschnitt homotop transformiert, kann nur die Identität sein. Das Hauptergebnis der Arbeit ist der folgende Satz: Eine reguläre Abbildung einer geschlossenen oder berandeten orientierbaren Fläche auf sich ist periodisch, ausgenommen die 4 folgenden Fälle: Kugel, Kreisfläche, Kreisring und Torus. Dieser Satz entspricht genau dem Klein-Poincaréschen Satz über konforme Abbildungen geschlossener oder berandeter Flächen. In der Tat ist, wenn man von den 4 Ausnahmefällen absieht, nach dem Brouwerschen Involutionssatz jede periodische und daher jede reguläre Abbildung einer konformen homöomorph. Die Eigenschaften regulär, konform, periodisch einer Selbstabbildung sind (bei Ausschluß der 4 Ausnahmefälle) topologisch äquivalent. — Schließlich wird eine Gruppe von regulären Abbildungen einer berandeten orientierbaren Fläche (unter Ausschluß von Kreisscheibe und Kreisring) betrachtet und gezeigt, daß jede solche Gruppe endlich ist.

H. Seifert (Dresden).

Kerékjártó, B. von: Über die regulären Abbildungen des Torus. Acta Litt. Sci. Szeged 7, 76—84 (1934).

Der in der vorangehenden Arbeit gegebene Beweis des Satzes, daß eine reguläre Selbstabbildung T einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ periodisch ist, bleibt auch für $p = 0$ gültig, falls die Abbildung oder eine Potenz einen Fixpunkt hat. Den Fall, daß kein Fixpunkt vorhanden ist, erledigt Verf. durch den folgenden Satz: Eine indikatrizerhaltende reguläre Abbildung der Torusfläche auf sich, die samt Potenzen fixpunktfrei ist, ist einer Verschiebung des Torus in sich

homöomorph und läßt sich in geeignet gewählten Koordinaten x, y durch die Formeln ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} x' &\equiv x + \alpha \\ y' &\equiv y + \beta \end{aligned} \right\} \pmod{1} \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y < 1, \end{cases}$$

wobei entweder α irrational und β rational ist oder aber α, β und 1 rational unabhängig sind. — Beim Beweis wird zwischen den beiden Fällen unterschieden, daß die Menge $\{P^n\}$ der sukzessiven Bilder eines Punktes P nicht überall dicht oder überall dicht auf dem Torus liegt. Im 2. Falle lassen sich die Potenzen von T zu einer kontinuierlichen Gruppe erweitern, die auf der Torusfläche einfach transitiv ist und die daher den Verschiebungen des Torus in sich homöomorph ist. Die Arbeit schließt mit einer Verallgemeinerung dieses zweiten Falles auf n -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten. *H. Seifert* (Dresden).

Kaufmann, Boris: The Cantor manifolds lying on a closed surface. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 428—444 (1934).

Es wird die Frage nach der Existenz beliebig kleiner Cantorscher Mannigfaltigkeiten (einer gegebenen Dimension), die einen gegebenen Punkt eines Kontinuums enthalten, behandelt. Es wird bewiesen, daß, wenn eine geschlossene Fläche (beschränktes Kontinuum, welches den R^3 in genau zwei Gebiete zerlegt und die gemeinsame Begrenzung derselben bildet) F durch die abgeschlossene Teilmenge Z zerlegt wird, es beliebig kleine zweidimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeiten gibt, die mit Z gemeinsame Punkte haben; es gibt sogar notwendig einen Punkt von Z , auf welchen sich beliebig kleine zweidimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeiten zusammenziehen. Es werden auch andere Sätze aus demselben Ideenkreis bewiesen.

P. Alexandroff (Moskau).

Kaufmann, Boris: Die lokale Struktur der ebenen Cantorschen Mannigfaltigkeiten. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 445—452 (1934).

Es werden Cantorsche Mannigfaltigkeiten in der Ebene vom Standpunkt ihrer lokalen dimensionstheoretischen Eigenschaften untersucht. Ein Punkt einer abgeschlossenen n -dimensionalen Menge F wird ein k -dimensionaler Mannigfaltigkeitspunkt genannt, wenn $k, 0 \leq k \leq n$, die größte Zahl von der Eigenschaft ist, daß es beliebig kleine k -dimensionale Cantorsche Teilmannigfaltigkeiten von F gibt, welche den gegebenen Punkt enthalten. Es wird bewiesen, daß alle nicht erreichbaren Punkte einer von einer geschlossenen Kurve begrenzten zweidimensionalen Cantorschen Mannigfaltigkeit in der Ebene eindimensionale Mannigfaltigkeitspunkte, während innere und erreichbare Randpunkte zweidimensionale Mannigfaltigkeitspunkte sind. Hieraus folgt, daß eine ebene geschlossene Kurve dann und nur dann eine Jordankurve ist, wenn sie durch Hinzufügung eines von ihr in der Ebene bestimmten Gebietes in eine Cantorsche Mannigfaltigkeit mit lauter zweidimensionalen Mannigfaltigkeitspunkten übergeht.

P. Alexandroff (Moskau).

Hantzsche, W., und H. Wendt: Dreidimensionale euklidische Raumformen. Math. Ann. **110**, 593—611 (1934).

Es werden die sämtlichen geschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raumformen aufgestellt, was auf die Ermittlung aller fixpunktlosen Bewegungsgruppen des euklidischen Raumes mit endlichem Diskontinuitätsbereich hinauskommt. Dies geschieht, da die Fixpunktlosigkeit wesentliche Vereinfachungen bedingt, unabhängig von den aus der Kristallographie bekannten Methoden zur Ermittlung der 230 kristallographischen Gruppen. Es gibt 6 orientierbare und 4 nichtorientierbare geschlossene Raumformen, die als topologisch verschieden erkannt werden. In betreff der offenen euklidischen Raumformen wird auf weitere Literatur verwiesen. *H. Seifert* (Dresden).

Pontrjagin, L.: The general topological theorem of duality for closed sets. Ann. of Math., II. s. **35**, 904—914 (1934).

Verf. beweist folgenden Satz, der als endgültige Verallgemeinerung des Alexander-

schen Dualitätssatzes für abgeschlossene Punktmengen des R^n zu betrachten ist: Die Gruppen B_G^r und B_X^{n-r-1} (von denen die eine sich auf F , die andere auf $R^n - F$ bezieht) sind Charakterengruppen voneinander. Dabei bilden G und X irgendein orthogonales Paar von Abelschen Gruppen (als Koeffizientenbereiche betrachtet), und die B sind Bettische Gruppen in bezug auf diese Koeffizientenbereiche. Charakterengruppe und Orthogonalität sind dabei im Sinne des Verf. [Theory of topological commutative groups, Ann. of Math. (2) 35, 361—388 (1934); dies. Zbl. 9, 156], der Begriff eines Koeffizientenbereiches im Sinne des Ref. (Urysohn'sche Konstanten, vgl. dies. Zbl. 6, 426) gemeint. Seinen allgemeinen Dualitätssatz erhält Verf. als Korollar des entsprechenden Verschlingungssatzes, welcher die Verschlingungsorthogonalität der beiden Gruppen B_G^r und B_X^{n-r-1} behauptet. *P. Alexandroff* (Moskau).

Wilder, R. L.: Generalized closed manifolds in n -space. Ann. of Math., II. s. 35, 876—903 (1934).

Es wird ein neuer (mengentheoretischer) Mannigfaltigkeitsbegriff aufgestellt. Ein n -dimensionaler kompakter metrischer Raum F heißt eine n -dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit M^n , wenn er folgende Eigenschaften besitzt: 1. Die n -te Bettische Zahl von F ist 1, von jeder echten abgeschlossenen Teilmenge von F ist Null; 2. zu jedem Punkt p von F gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß jeder r -dimensionale Zyklus ($0 \leq r \leq n-1$) der ε -Umgebung $U(p, \varepsilon)$ von p in F berandet (für $r=0$ kommen nur berandungsfähige Zyklen, d. h. Zyklen mit verschwindender Koeffizientensumme in Betracht); 3. zu jedem Punkt p von F und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Zahlen d und σ , $0 < \sigma < d < \varepsilon$, solcher Art, daß jeder r -dimensionale Zyklus ($0 \leq r \leq n-2$) der Begrenzung $\overline{U(p, d)} - U(p, d)$ von $U(p, d)$ in $\overline{U(p, \varepsilon)} - U(p, \sigma)$ berandet, während jeder $(n-1)$ -dimensionale Zyklus von $\overline{U(p, d)} - U(p, d)$ in $F - U(p, \sigma)$ berandet. Verf. beweist, daß eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge F des R^n dann und nur dann eine M^{n-1} ist, wenn F den R^n in zwei unbewallte (= gleichmäßig lokal zusammenhängende) Gebiete zerlegt und die gemeinsame Begrenzung dieser beiden Gebiete ist. Falls F den Bedingungen 2. und 3. der obigen Mannigfaltigkeitsdefinition genügt, so hat jede Komponente von $R^n - F$ eine M^{n-1} als Begrenzung. Es wird weiter noch eine Reihe grundlegender Sätze aus demselben Ideenkreis bewiesen. Es werden insbesondere die M^{n-1} des R^n durch Eigenschaften eines Komplementärgebietes charakterisiert. Außerdem wird folgendes neues Dualitätstheorem bewiesen: sind D und D_1 die beiden Gebiete, in welche der R^n durch eine M^{n-1} zerlegt wird, so ist $p^r(D) = p^{n-r-1}(D_1)$, wobei durch p die Bettische Zahl (entsprechender Dimensionszahl) bezeichnet wird. Diese Bettischen Zahlen (ebenso wie die der Mannigfaltigkeit selbst) sind endlich. Für letztere Zahlen gilt (immer im Falle einer in den R^n eingebetteten M^{n-1}) der Poincarésche Dualitätssatz. Die allgemeinen Resultate der für den R^n aufgestellten Theorie werden für $n=3$ spezialisiert. Es ergibt sich dabei, daß die geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten im Sinne des Verf. mit den geschlossenen Flächen im klassischen Sinne identisch sind. Auf diese Weise wird Anschluß an die früheren Resultate des Verf. gewonnen. Der Ref. möchte betonen, daß er hier nur über einen Teil der Resultate dieser überaus inhaltsreichen Arbeit berichtet hat.

P. Alexandroff (Moskau).

Kreines, M.: Das formale Produkt der topologischen Komplexe. Rec. math. Moscou 41, 332—338 u. dtsh. Zusammenfassung 338 (1934) [Russisch].

Bezeichnet man ein Simplex mit den Eckpunkten x_1, \dots, x_n durch $x_1 \dots x_n$, so läßt sich jeder Komplex in der Gestalt eines Polynoms schreiben, dessen Koeffizienten die Werte Null und 1 haben und umgekehrt. Ist $C(x_1, \dots, x_n)$ ein solches Polynom (oder, was dasselbe ist, ein Komplex), so lassen sich verschiedene Konstruktionen der kombinatorischen Topologie durch einfache Formeln ausdrücken; so stellt z. B. $x_i \frac{\partial C}{\partial x_i}$ den Stern um den Eckpunkt x_i , ebenso wie $x_i x_k \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_k}$ den Stern um die Kante $x_i x_k$

dar. Im Falle eines eindimensionalen Komplexes liefert der Operator

$$J_k(\) = \sum_{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$$

die Verzweigungsordnung im Eckpunkt x_k usw. Außerdem wird eine neue Art Produktbildung für topologische Räume eingeführt und auf Komplexe angewandt: als Elemente des Produktes von X und Y treten die Tripel (x, y, t) auf, wobei x ein Punkt von X , y ein Punkt von Y und t ein Punkt der Einheitsstrecke $0 \leq t \leq 1$ ist; dabei werden je zwei Punkte $(x, y_1, 0)$ und $(x, y_2, 0)$ ebenso wie $(x_1, y, 1)$ und $(x_2, y, 1)$ untereinander identifiziert. Das Produkt von $(n+1)$ Punkten ist ein n -dimensionales Simplex, das Produkt von $(n+1)$ Punktepaaren eine n -dimensionale Sphäre usw. Diese Betrachtungen werden auf das Alexandersche Beispiel zweier M^3 mit verschiedenen Fundamentalgruppen angewandt. Das Interesse der Arbeit liegt hauptsächlich in neuen symbolischen Formulierungen an und für sich bekannter Begriffe.

P. Alexandroff (Moskau)

Eilenberg, Samuel: Sur quelques propriétés des transformations localement homéomorphes. *Fundam. Math.* **24**, 35—42 (1934).

If X and Y are compact metric spaces, a transformation $g(X) = Y$ is said to be locally homeomorphic provided that for each $x \in X$ some neighborhood $U(x)$ is transformed under g homeomorphically into a neighborhood $g[U(x)]$ of $g(x)$. After proving some lemmas of a general character, the author shows that if Y_k denotes the set of points $y \in Y$ such that $g^{-1}(y)$ contains exactly k points, then the sets Y_k are both open and closed in Y and for some integer N , $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$. This is followed by a lemma yielding, for sufficiently small subsets A of Y , a decomposition of $g^{-1}(A)$ into k sets each of which maps into A homeomorphically under g . Using the Vietories extensions of the combinatorial concepts, the author studies the relations between the Betti groups of X and of Y when X maps into Y under a locally homeomorphic transformation g . It is shown (1) that g determines a homeomorphic transformation of the Betti groups of X with rational coefficients into the corresponding groups of Y , (2) that if g is not an essential transformation in the sense of Hopf, then these Betti groups of Y with rational coefficients and of dimension > 0 all vanish, and (3) that if X is an arcwise connected continuum and Y is a continuum whose fundamental group vanishes, then g is a homeomorphism. *G. T. Whyburn* (University, Virginia).

Kolmogoroff, A.: Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. *Studia Math.* **5**, 29—33 (1935).

Verf. betrachtet „topologische lineare Räume“, das sind Abelsche (additiv geschriebene) topologische Gruppen, die die reellen Zahlen als (stetige) Multiplikatoren gestatten. Topologisch werden nur die ersten drei Hausdorffschen Axiome und das erste Trennungsaxiom vorausgesetzt. Verf. beweist zuerst, daß jede (in diesem Sinne) topologische Gruppe auch dem zweiten und dritten Trennungsaxiom genügt, also regulär ist [D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra. I. Kompletierungstheorie. *Math. Ann.* **107**, 587—626 (1932); dies. Zbl. **6**, 7, beweist diesen Satz S. 608 unter Voraussetzung der sämtlichen Hausdorffschen Axiome für beliebige (nichtkommutative) topologische Gruppen; für den Beweis machen diese Unterschiede wenig aus. Ref.]. — Verf. nennt eine Teilmenge A eines linearen Raumes E beschränkt, falls aus $x, y \in A$, $\alpha, \beta \rightarrow 0$ (α, β reelle Zahlen) $\alpha x, \beta y \rightarrow 0$ folgt; A heißt konvex, falls aus $x \in A$, $y \in A$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$

$$\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \in A$$

folgt. Weiter heißt E normierbar, wenn er eine die ursprüngliche Topologisierung bestimmende Metrik $\varrho(x, y)$ gestattet derart, daß für $|x| = \varrho(x, 0)$ gilt: $|ax| = |a||x|$ (a reelle Zahl) und $|x + y| \leq |x| + |y|$. Verf. beweist dann: Für die Normierbarkeit des Raumes ist notwendig und hinreichend, daß in E mindestens eine beschränkte konvexe Umgebung der Null existiert. *D. van Dantzig*.

Astronomie und Astrophysik.

Wilkins, A.: Die Erweiterung des Laplace-Lagrangesehen Theorems der Unveränderlichkeit der großen Achsen der Planetenbahnen auf die kommensurablen und nahe kommensurablen Bewegungsformen. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1934, 195—207 H. 2.

In einem System Sonne—Jupiter—Kleiner Planet, in dem Jupiter eine Kepler-Ellipse beschreibt, erfährt der masselose Planetoid Störungen seiner großen Halbachse, die sich in der Nähe von Kommensurabilitätsstellen mit Jupiter bekanntlich nach Potenzen von $\sqrt{m'}$ entwickeln lassen. Es wird gezeigt, daß die ersten Glieder dieser Reihe keine mit der Zeit fortschreitenden Terme enthalten. *A. Klose.*

Sciobereti, R. H.: On the determination of the geocentric distance in the Laplace-Leuschner direct method for parabolic orbits. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 539 bis 541 (1934).

Graphische Lösung der Fundamentalgleichung im parabolischen Bahnbestimmungsproblem. Diskussion der Fälle, in denen mehrfache Lösungen auftreten können.

A. Klose (Berlin).

● **Williams, Kenneth P.:** The calculation of the orbits of asteroids and comets. Bloomington: Principia press, Inc. 1934. VII, 214 S.

Die Methoden zur Bestimmung einer ersten Bahn nach Laplace, Gauß und Olbers werden in für das Maschinenrechnen besonders geeigneten Modifikationen dargestellt und an numerisch durchgeführten Beispielen erläutert. Die einleitenden Kapitel bringen die notwendigen Grundlagen aus der sphärischen Astronomie, der Interpolationsrechnung und eine ausführliche Darstellung des Zweikörperproblems. Historische Notizen und zahlreiche Übungsaufgaben sind jedem Kapitel beigegeben.

A. Klose (Berlin).

Graffi, D.: Sopra un caso speciale del problema dei due corpi di massa variabile. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 95—100 (1934).

Die adiabatische Invariante des Zweikörperproblems mit zeitabhängiger Gesamtmasse m wird in dem Fall, daß m sich gemäß dem Jeansschen Ansatz verändert, mittels direkter Abschätzungen in den Differentialgleichungen behandelt [vgl. die Arbeiten des Verf., Atti Accad. Sci. Torino 68, 262, 459 (1933); dies. Zbl. 7, 372]. Es ergeben sich so in verschärfter Form die Resultate von Burgatti [Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s. 37, 71; vgl. nachst. Referat].

Wintner (Baltimore).

Burgatti, Pietro: Intorno agli effetti che produce sulle orbite delle binarie la perdita di massa per radiazione. Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s. 37, 71—79 (1933).

Nach einer kurzen Kritik der Arbeiten Armellinis über dasselbe Problem (in Rend. Acc. Lincei 1932; dies. Zbl. 5, 315, 325) untersucht der Verf. die direkte Wirkung des Massenverlustes durch Strahlung auf die Bahnen von Doppelsternen. Als Ausgangspunkt wählt er das Eddington-Jeanssche Strahlungsgesetz $\frac{dm}{dt} = -a m^3$ (a = Konstante, m = Summe der Massen) und die Beobachtungstatsache, daß es eine unzählige Menge von Peri- und Apoastronen gibt, die den einzelnen vollbrachten Spiralbahnen des Doppelsternsystems entsprechen. Es wurde die genaue Exzentrizität für solche vollendete Bahnen berechnet und dieselbe konstant gefunden. Verf. denkt also eine Vergrößerung der Exzentrizität durch Massenverlust als nicht gut möglich. Entweder sind Doppelsterne nicht durch Spaltung eines einzigen Sternes entstanden oder waren hier andere Störungen tätig.

Hubert Slouka (Prag).

Bemporad, Giulio: Sulle variazioni dell'eccentricità nelle orbite dei sistemi binari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 880—886 (1934).

Bei der Diskussion der Exzentrizität im Falle eines Jeansschen Ansatzes für die Variabilität der Masse läßt die übliche Behandlung (vgl. Burgatti, vorst. Referat) eine Frage offen, die nun vom Verf. durchgerechnet wird. *Wintner (Baltimore).*

Durand, Georges: Sur l'application de la relation masse-luminosité au calcul des éléments orbitaux des étoiles doubles spectroscopiques. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1099—1101 (1934).

Verf. gibt eine Methode an, um mit Hilfe des Massen-Leuchtkraftgesetzes sämtliche Elemente eines spektroskopischen Doppelsternes zu berechnen, dessen beide Komponenten im Spektrum sichtbar sind, wenn außerdem noch die Parallaxe bekannt ist. Am Schluß untersucht er noch die Genauigkeit des Resultats. *G. Schrutka.*

Öpik, Ernst: Atomic collisions and radiation of meteors. Acta et Comment. Univ. Tartu A 26, Nr 2, 1—39 (1934).

The paper gives in its introduction some general critical considerations on previous theoretical work on the radiation of meteors. Then the forces of interaction in atomic collisions are discussed, and in the following sections an investigation of the dissipation of kinetic energy by high speed atoms, and of the ionization by atomic collisions is presented. The rest of the paper deals with the applications to the radiation of meteors; for details the reader must be referred to the original paper. *Steensholt.*

Jahn, W.: Über die Frequenz- und Richtungsverteilung der Strahlung in der Sonnenatmosphäre. Astron. Nachr. 253, 377—404 (1934).

Durch die Untersuchungen von Schwarzschild, Milne, Lindblad und Lundblad ist der Zusammenhang zwischen Emission und Absorption in den verschiedenen Schichten der Sonnenatmosphäre einerseits und der Intensität der Sonnenstrahlung in Abhängigkeit von Wellenlänge und Richtung andererseits weitgehend klargestellt worden. Während aber das aus den genannten Untersuchungen in bezug auf die Emission gefolgerte Resultat, daß die Emission im kontinuierlichen Spektrum für die in Betracht kommenden Schichten mit Hilfe des Planckschen Gesetzes aus den Schichttemperaturen berechnet werden kann, physikalisch gedeutet werden kann, steht die detaillierte Verknüpfung der erhaltenen Resultate über die Absorption mit den physikalischen Eigenschaften der Schichten noch aus. Ansätze zur Lösung dieses komplizierten Problems liegen in Arbeiten von McCrea, Chandrasekhar, Unsöld und Biermann vor. Das genannte Problem bildet auch den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit. Verf. schematisiert das Problem, indem er die in Frage kommenden atomaren Absorptionskoeffizienten mit Hilfe der für Elektronen in Coulombfeldern gültigen Formeln berechnet. Die relative Häufigkeit der Elemente wird gemäß den von Russell aus Untersuchungen der Absorptionslinien erhaltenen Resultaten angesetzt. Indem ferner die bekannten Ausdrücke für die Verteilung der Atome über die stationären Zustände benutzt werden, können die Beiträge der verschiedenen (in sehr großer Anzahl vorhandenen) Absorptionskanten zum Absorptionskoeffizienten für das ganze Spektrum als Funktion von Temperatur und Druck numerisch berechnet werden. Verf. führt die Rechnungen für mehrere Temperaturen und Drucke durch. Die Resultate werden sowohl in Tabellenform wie graphisch gegeben. Verf. betont, daß der Temperaturgradient in der Sonnenatmosphäre dazu beiträgt, die Wirkung der Unstetigkeiten an den einzelnen Kanten auszugleichen, wo es auf Mittelwerte über die verschiedenen Schichten ankommt. Im letzten Teil der Arbeit bringt Verf. die Resultate einiger Detailuntersuchungen über das eingangs erwähnte von Schwarzschild, Milne, Lindblad und Lundblad behandelte Problem.

Bengt Strömberg (Kopenhagen).

Strebel, H.: Realer Sonnenfleck im Gegensatz zum theoretischen Fleckmodell. Astron. Nachr. 253, 409—424 (1934).

The author considers that a critical examination of observational data relating to the sun's surface and its spectrum does not support theories of sun-spots which ascribe to them a vortex motion, nor those which ascribe the difference of their spectrum from the general solar spectrum to a cooling of their gases by adiabatic expansion. He puts forward the alternative view that the umbra of a sun-spot is a region of the sun's surface where the over-lying layer of granulations is absent. He discusses also

the possibility that the solar radiation is complicated by the presence of a "luminescence" radiation caused by collisions of ions in low pressure regions, in addition to the normal temperature radiation. The discussion is entirely qualitative.

W. H. McCrea (London).

Ten Bruggencate, P.: Der innere Aufbau rein gasförmiger Sterne. *Z. Astrophys.* **9**, 110—122 (1934).

The paper deals with stellar models in which the ideal gas law is assumed to hold throughout, and in which the rate of energy-generation is independent of temperature, while the absorption coefficient κ is of the form $\kappa = \kappa_0 \cdot \rho \cdot T^{-7/2}$. Milne has surmised that such models with the mass and luminosity of real stars must have radii of the order of 1 Parsec, central densities of the order 10^{-25} g/cm³, and central temperatures of the order of 1° [*Z. Astrophys.* **4**, 75 (1932); this *Zbl.* **4**, 44]. The present author tests this hypothesis by actual numerical integration of the fundamental equations of the problem using a form of them due to Rosseland [*Z. Astrophys.* **4**, 255 (1932); this *Zbl.* **4**, 287]. His results provide examples of model stars of the type considered which do not have the very diffuse form suggested by Milne, though they indicate that models of mass large compared with the sun's mass may possess this form. He considers that his results predict also an almost exact mass-luminosity law for the models studied.

W. H. McCrea (London).

Majumdar, R. C.: Die Transportphänomene in einem ionisierten Gas. *Z. Physik* **91**, 706—716 (1934).

The paper gives an adaptation to the calculation of transport phenomena in an ionised gas of the mathematical methods used to calculate the electrical conductivity etc. in the quantum theory of metals. The essential difference between the two calculations is that, while in a metal all the electrons in the lattice must be taken into account, in the ionised gas only the free electrons have to be considered and their number calculated by means of the appropriate ionisation formula. The cases where these electrons are degenerate and non-degenerate have to be distinguished. The author first writes down the general "Boltzmann Equation" for the distribution function and proceeds to solve it, the solution containing the matrix elements of the interaction energy between the electrons and ions. The collisions between these systems are assumed to be elastic. He first derives general expressions for the coefficients of conductivity etc. Then he works out in detail the particular case where the potential energy of an electron ($-\epsilon$) in the field of an ion of charge ze is assumed to be $V = ze^2 e^{-r/b}/r$, where b is the shielding constant. He tabulates the coefficients of electrical and thermal conductivity, diffusion, and viscosity, for the degenerate and non-degenerate cases, as functions of the temperature, density, the atomic constants, and certain parameters depending on b . Finally he tabulates numerical values of these coefficients for a selection of states of matter in stellar interiors. He points out that his formulae will not hold in the outer regions of stars where the interaction of electrons and ions is complicated by the Ramsauer effect.

W. H. McCrea.

Rein, Natalie: On the condensations in dust nebulae. II. On the rotation of condensations. *Russ. astron. J.* **11**, 330—344 u. engl. Zusammenfassung 345 (1934) [Russisch].

I. s. dies. *Zbl.* **8**, 421.

Heckmann, O., und H. Strassl: Zur Dynamik des Sternsystems. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen II, N. F.* **1**, 91—106 (1934).

Avoiding the averaging in time as well as the condition of steady state, the authors consider stellar system in a small space-time volume, which alone is represented by the data of observations. With this purpose in view the Gaussian form for the distribution function of velocities — u, v, w — is adopted $f = A e^{-\frac{1}{2}Q(u, v, w)}$, Q being quadratic in velocities with the coefficients depending on x, y, z, t . The following special conditions are assumed. The potential — φ — is symmetrical around the z -axis, while

x, y plane is the plane of symmetry for stellar systems. In this case $\varphi = \varphi(r, z^2)$ which (if one neglects the cubic terms in coordinates) takes the form

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{r_0} \xi + 2z_0 \varphi_{z_0} \zeta + \frac{1}{2} \left[\varphi_{r_0 r_0} \xi^2 + \frac{1}{r_0} \varphi_{r_0} \eta^2 + 2\varphi_{z_0} \zeta^2 \right],$$

where $\xi = x - x_0$, $\eta = y$, $\zeta = z - z_0$. After these preliminaries the canonical equations of motion are solved and the polynomial Q in Gaussian distribution function f is determined. The next step consists in calculating the moments of the first order, i. e. the streamings. The components of streamings U, V appear to be polynomials of second degree in coordinates, while W component is linear in coordinates.

B. P. Gerasimovič (Poulkovo).

Relativitätstheorie.

- Glaser, Walter:** Über Raum und Zeit in beliebige bewegten Systemen. *Z. Physik* **92**, 64—75 (1934).
Glaser, Walter: Gilt auf der rotierenden Scheibe die nichteuklidische Geometrie? *Physik. Z.* **35**, 867—870 (1934).

In the former of these two papers the author gives equations connecting the space and time differentials of an inertial system with those of a system of reference moving in any manner relative to it. On the basis of the conditions of integrability of these equations he investigates the circumstances in which it is possible to speak of (cosmic) "space" and "time" in the moving system, and deduces that the line-element can be partitioned into space and time only in the case of a uniformly moving system. In particular he maintains that, contrary to the common belief, non-euclidean geometry is not valid for the rotating disc. This is discussed in greater detail in the second paper.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Baumgardt, Ludwig: Berichtigung zu dem Artikel: Über die Verallgemeinerung des Michelson-Versuches. *Z. Physik* **91**, 819 (1934).

Berichtigend wird festgestellt, daß die im genannten Artikel (vgl. dies. Zbl. **10**, 88) angegebene Streifenverschiebung noch mit dem Brechungsexponenten des Mediums, in welchem beide Lichtwege verlaufen, multipliziert werden muß.

Heckmann.

Guth, Eugen, und Arthur Haas: Über die Beziehungen zwischen der relativistischen Massenformel und der klassischen Mechanik. *Anz. Akad. Wiss., Wien* **1934**, 245—247 Nr 19.

The differential equation $dE = c^2 dm$ expressing the relationship between energy and mass, and the Hamiltonian equation $dE = v dp$ (v velocity, p impulse), are together sufficient for the determination of the equation $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ which expresses the dependence of mass on velocity.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Garcia, G.: Correzione einsteiniana del tempo nel movimento planetario. *II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **20**, 174—178 (1934).

After giving a few corrections to his earlier paper *Leggi del movimento planetario einsteiniano* (this Zbl. **10**, 89), the author derives formulae which, to a second approximation, give the relativistic corrections to the equations of planetary motion. In particular he deduces expressions for the periods of anomalistic and sidereal revolutions.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Syge, J. L.: The energy tensor of a continuous medium. *Trans. Roy. Soc. Canada*, III. s. **28**, 127—171 (1934).

This paper contains a logical development of the dynamics of a continuous medium in special and general relativity. It begins with the theory of a medium composed of particles, photons and "elementary impulses", the work being based on a set of clearly-stated hypotheses which include the law of conservation of energy-momentum for collisions between the fundamental entities. Of these entities the elementary impulses are themselves hypothetical: they are defined to be projectiles passing from one particle to another with the velocity of light. When the elementary impulse is

repulsive, it is mechanically indistinguishable from a photon; when it is attractive, it accounts for the existence of tension in the medium. — The energy tensor is defined microscopically and proved to have zero divergence. Its physical significance is discussed in some detail. In passing from the microscopic to the macroscopic, the author gives careful definitions of the mean motion at a point in a medium, of the mean proper density at a point, and, later, of a perfect fluid. An incompressible fluid is then defined as one in which the normal cross-section of every infinitesimal tube of world-lines of mean motion is constant along the tube. In the case of a perfect fluid this definition agrees with that of Schwarzschild. — The author's actual results are not new, as he himself points out. But his systematic deduction of the properties of a continuous medium from those of a disordered microscopic system provide a new approach to fundamental problems of relativistic mechanics. — At the end of the paper is an appendix dealing in a novel fashion with volume and Green's theorem in a Riemannian space, full allowance being made for indefiniteness in the fundamental quadratic form.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Milner, S. R.: Le caractère arbitraire de la géométrie de l'univers. Enseignement Math. 33, 88—90 (1934).

Dantzig, D. van: The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 421—427 (1934).

Verf. benutzt zunächst die gewöhnliche dreidimensionale Vektorsymbolik und schreibt die Maxwellschen Gleichungen in Integralforn. Interpretiert man nun \mathfrak{S} und \mathfrak{E} als kovariante Vektoren, \mathfrak{D} und \mathfrak{B} als kovariante antisymmetrische Tensoren zweiten Ranges, ρ als einen solchen Tensor dritten Ranges, so tritt in den Maxwellschen Gleichungen der metrische Fundamentaltensor nicht mehr explizite auf. Dieses Resultat läßt sich leicht auf die vierdimensionale Form der Maxwellschen Gleichungen übertragen. Verf. untersucht ferner die Beziehung zwischen $(\mathfrak{E}, \mathfrak{B}) = F_{ij}$ und $(-\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}^{ij}$; diese wird in der Form

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \eta_{ijkl} \mathfrak{S}^{kl} \quad (*)$$

geschrieben. Die Tensordichte η_{ijkl} hat die Symmetrie der Riemannschen Vierindizes-symbole und charakterisiert die Materie. Das Hauptergebnis der Arbeit ist der Beweis der Möglichkeit, die Maxwellschen Gleichungen ohne explizite Verwendung der Metrik zu formulieren.

V. Fock (Leningrad).

Dantzig, D. van: Electromagnetism, independent of metrical geometry. I. The foundations. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 521—525 (1934).

In der Einleitung stellt Verf. das folgende Programm auf: Die Grundgesetze der Physik sollen in einer Form formuliert werden, welche unabhängig von der Metrik ist. Im folgenden wird gezeigt, daß dies für das elektromagnetische Feld möglich ist. (Der vorliegende Teil I ist im wesentlichen eine Wiedergabe der im vorstehenden Ref. besprochenen Arbeit.)

V. Fock (Leningrad).

Dantzig, D. van: Electromagnetism independent of metrical geometry. II. Variational principles and further generalisation of the theory. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 526—531 (1934).

Sieht man von der Relation zwischen $(\mathfrak{E}, \mathfrak{B}) = F_{ij}$ und $(-\mathfrak{D}, \mathfrak{S}) = \mathfrak{S}^{ij}$ ab, so läßt sich das Variationsprinzip für die elektromagnetischen Feldgleichungen in zweierlei Formen schreiben. In der einen Form (A) wird nach den Potentialen φ_j und in der anderen (B) nach den \mathfrak{S}^{ij} variiert; dabei spielt in (A) der Strom \mathfrak{s}^i eine analoge Rolle wie die F_{ij} in (B). Der Parallelismus zwischen (A) und (B) geht indessen verloren, wenn man die „Verbindungsgleichungen“ zwischen \mathfrak{S}^{ij} und F_{ij} in der im I. Teil vorgeschlagenen Form (*) (s. vorst. Ref.) benutzt. Daher wird statt (*) angesetzt

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \int \gamma_{ijk'v} \mathfrak{S}^{k'v} d\Sigma', \quad (1)$$

wo über die vierdimensionale Raumzeit integriert wird. Analog kann man ansetzen

$$\varphi_i = \int \gamma_{iv} \mathfrak{S}^{iv} d\Sigma'. \quad (2)$$

Die $\gamma_{i'}$ und $\gamma_{ijk'}$ sind (uneigentliche) Funktionen von 2 Punkten x und x' , welche durch die Relation

$$\gamma_{ijk'} = \frac{\partial}{\partial x_{k'}} \left(\frac{\partial \gamma_{j' i'}}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma_{i' j'}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \gamma_{i' k'}}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma_{i' k'}}{\partial x_k'} \right) \quad (3)$$

verknüpft sind. Für den Fall des Vakuums in der speziellen Relativitätstheorie gilt $\gamma_{i' j'} = g_{i' j'} \gamma(x, x')$, wo $\gamma(x, x')$ die sog. invariante Deltafunktion der Quantenmechanik bezeichnet. Durch den Ansatz (1), (2), (3) gelingt es, auch im allgemeinen Fall den Parallelismus zwischen den Formen (A) und (B) des Variationsprinzips aufrechtzu-erhalten.

V. Fock (Leningrad).

Quantentheorie.

Morand, Max: Sur l'unité des sciences physiques. *Scientia* 57, 1—15 (1935).

Bedreag, C. G.: Limites de la précision de référence des systèmes atomiques. *Bul. fac. ști. Cernăuți* 7, 313—320 (1934).

Elementare Betrachtungen und Erläuterungen zu den Ungenauigkeitsregeln.

P. Jordan (Rostock).

Dass, P.: On quantised motion under two centres of force. *Indian Phys.-Math. J.* 5, 45—51 (1934).

Es wird die (selbstverständliche, der Ref.) Tatsache bewiesen, daß beim Zweizentren-Problem mit einem Elektron die Eigenwerte mit abnehmendem Kernabstand gegen eine Balmerformel des Einkernproblems konvergieren. *Bechert* (Gießen).

Wataghin, Gleb: Über die relativistische Quanten-Elektrodynamik und die Ausstrahlung bei Stößen sehr energiereicher Elektronen. *Z. Physik* 92, 547—560 (1934).

Der Verf. behandelt ausführlicher eine von ihm früher vorgeschlagene Formulierung der Quantenelektrodynamik [*Z. Physik* 88, 92 (1934); dies. Zbl. 8, 380], welche auf der Einführung einer oberen Grenze (etwa $137 mc^2$) für die auf ein Elektron durch Strahlung übertragene Energie beruht, wobei diese Energie in dem Bezugssystem zu messen ist, in welchem das Elektron anfangs ruht. Verf. gibt einen Beweis der relativistischen Invarianz der Methode, berechnet die elektrostatische Selbstenergie (für welche die Größenordnung mc^2 erhalten wird), ferner (nach der Methode von Fermi und Weissäcker mit kritischen Bemerkungen über frühere Anwendungen der Methode) die Ausstrahlung bei Stößen sehr energiereicher Elektronen und diskutiert kurz die Anwendung der Theorie auf die Paarerzeugung. *Waller*.

Brogie, Louis de: Sur l'expression de la densité dans la nouvelle théorie du photon. *C. R. Acad. Sci., Paris* 199, 1165—1168 (1934).

Die vom Verf. entwickelte Theorie des Photons ergibt für die 16 Wellenfunktionen Φ_{ij} derartige Transformationsgesetze, daß die Summe der quadrierten Absolutwerte: $\sum_{ij} |\Phi_{ij}|^2$, nicht die Zeitkomponente eines Vierervektors, sondern die 4,4-Komponente eines Tensors ist. Deshalb schlägt der Verf. als Wahrscheinlichkeitsdichte des Lichtquants den Ausdruck

$$\varrho = \sum_{ij} \Phi_{ij}^* (A_4 \Phi)_{ij}$$

vor (der * bedeutet die konjugiert-komplexe Größe), wo A_4 die früher definierte Matrix ist. — Es ist vom Verf. nicht hervorgehoben, daß dieser Ausdruck ϱ nicht nur positive, sondern auch negative Werte annimmt, wodurch die vorgeschlagene Deutung unmöglich gemacht wird.

P. Jordan (Rostock).

David, E.: Spinwechselwirkung mit Austausch bei Alkaliatomen. *Z. Physik* 91, 289—317 (1934).

Bei den Alkalien und alkaliähnlichen Atomionen gibt es eine Reihe von Termen, die zu kleine oder gar verkehrte Dublett-Aufspaltung haben. Klassisch ist diese Anomalie nicht zu erklären. Eine Deutung gelingt bei Berücksichtigung der Austauschintegrale der Spinwechselwirkung. Ansatz: Breitischer Wechselwirkungsoperator, Eigenfunktion des Gesamtatoms als Determinante aus Produkten von Hartree-Eigen-

funktionen der einzelnen Elektronen geschrieben. Ausführlich durchgerechnet wird der Term $2p$ des Li (anomal kleine Aufspaltung). Experimentell: $\Delta\nu = 0,34 \text{ cm}^{-1}$; berechnet: $\Delta\nu = 0,26 \text{ cm}^{-1}$. *Bechert* (Gießen).

Körwien, Hanns: Die Dispersion des Heliums im Grundzustand nach der Wellenmechanik. Z. Physik **91**, 1—36 (1934).

Um die quantenmechanische Dispersionsformel auswerten zu können, muß man die Oszillatorenstärken aller Übergänge nach dem Grundzustand berechnen. Für den Grundzustand und die zwei ersten P -Zustände des He sind Hylleraassche Eigenfunktionen benutzt worden, die übrigen P -Zustände und die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums wurden durch Wasserstofffunktionen approximiert. Die Dispersion [dargestellt durch $(n-1) \cdot 10^7$] ergibt sich zwischen $\lambda = 6438 \text{ Å}$ und $\lambda = 2303 \text{ Å}$ um einen mittleren Fehler von 3% zu groß gegenüber den Beobachtungswerten; $\epsilon - 1$ (ϵ = Dielektrizitätskonstante) fällt um 0,3% zu groß aus. Der F -Summensatz gibt 2,058 als Summe aller Oszillatorenstärken gegenüber dem richtigen Wert 2. *Bechert* (Gießen).

Franchetti, S.: Forze interatomiche e frequenze di oscillazione degli atomi nei reticolati. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 186—191 (1934).

Versuch, eine mittlere Schwingungsfrequenz der Atome um ihre Ruhelage in einem festen Körper zu definieren. Anwendung auf die Ableitung der Madelungschen Formel über den Zusammenhang zwischen Schwingungsfrequenz und Kompressibilität. *Bechert* (Gießen).

Hartree, D. R.: Results of calculations of atomic wave functions. II. Results for K^+ and Cs^+ . Proc. Roy. Soc. London A **143**, 506—517 (1934).

Die Wellenfunktionen und das Atomfeld von K^+ , Cs^+ werden nach der Methode des self-consistent field berechnet und die früher gegebenen Resultate für Cu^+ [Proc. Roy. Soc. London A **141**, 282 (1933); dies. Zbl. **7**, 266] vervollständigt. *Bechert*.

Uehling, E. A.: Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases. II. Physic. Rev., II. s. **46**, 917—929 (1934).

In einer früheren Arbeit über den gleichen Gegenstand [Physic. Rev. **43**, 552 (1933); dies. Zbl. **6**, 334] haben Uehling und Uhlenbeck die Methode von Lorentz, Hilbert und Enskog zur Behandlung der Transportphänomene in Gasen gemäß der Quantentheorie modifiziert. Es ist von vornherein zu erwarten, daß die so berechneten Koeffizienten der inneren Reibung η und die Wärmeleitfähigkeit κ gegenüber den klassischen Werten Veränderungen erfahren, die bei solchen Temperaturen beträchtlich werden, bei denen die den bewegten Molekülen zugehörigen de Broglie-Wellenlängen mit ihrem Durchmesser vergleichbar werden und außerdem noch davon abhängig sind, welche Statistik für das betreffende Gas gilt. In der vorliegenden Arbeit werden die in der ersten Arbeit aufgestellten Integralgleichungen gelöst und die so gewonnenen Ausdrücke für η und κ für He und H_2 numerisch ausgewertet. Es zeigt sich, daß die so berechnete Temperaturabhängigkeit von η und κ mit den Experimenten besser übereinstimmt als die nach der klassischen Theorie berechnete. Die Theorie ergibt ferner im Gegensatz zu der klassischen Theorie der idealen Gase eine Dichteabhängigkeit von η und κ , die zu derjenigen hinzutritt, die wegen der Abweichungen vom idealen Gaszustand zu erwarten ist und experimentell gut nachweisbar sein mußte. *Fürth* (Prag).

Sugita, Motoyosi: On the theory of temperature ionization of gas. II. The general theory and the relation between temperature and pressure ionization. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **16**, 401—413 (1934).

Ausgehend von den Betrachtungen des ersten Teiles seiner Arbeit (vgl. dies. Zbl. **9**, 420) über das Abbrechen der Zustandssumme, diskutiert Verf. die Ionisierung eines aus Wasserstoffatomen bestehenden Gases in Abhängigkeit von Temperatur und Druck. Die Ergebnisse werden mit denjenigen anderer Autoren verglichen, und ihr Gültigkeitsbereich wird diskutiert. *Casimir* (Leiden).

Slater, J. C.: Electronic structure of metals. Rev. Modern Physics **6**, 209—280 (1934).

Bericht über einige Betrachtungen zur Metalltheorie mit besonderer Betonung der verschiedenen Näherungsannahmen, unter denen sich die Energiewerte der Elektronen im Gitter prinzipiell berechnen lassen. Die Darstellung ist qualitativ. Vollständiges Literaturverzeichnis.

R. Peierls (Manchester).

● **Gans, Richard, und Bernhard Mrowka: Beiträge zur Theorie des Atommagnetismus.** (Schriften d. Königsberg. gelehrten Ges. Jg. 11, H. 4.) Halle a. d. S.: Max Niemeyer 1934. 34 S.

Allgemeine Theorie des Dia- und Paramagnetismus von Molekülen in klassischer Behandlung (kein Atommagnetismus) und nach der Wellenmechanik. Anwendung auf das H_2 -Molekül. Berechnung von Integralen, die in den bisherigen Arbeiten nur abgeschätzt worden waren und Bestätigung der Interpretation des Stern-Estermannschen experimentellen Ergebnisses, das zur Bestimmung des magnetischen Moments von Proton und Deuteron führt.

R. Peierls (Manchester).

Bloch, F.: Inkohärente Röntgenstreuung und Dichteschwankungen eines entarteten Fermigas. Helv. physica Acta **7**, 385—405 (1934).

Das Problem der inkohärenten Röntgenstreuung von Atomen (mit Vernachlässigung des Dispersionsanteils) wird gemäß des Thomas-Fermischen Atommodells mit den Dichteschwankungen eines entarteten Fermigas in Verbindung gesetzt, wobei statt der üblichen statischen Verwendung dieses Modells ein dynamisches Verhalten, beschrieben durch hydrodynamische Bewegungsgleichungen [F. Bloch, Z. Physik **81**, 363 (1933); dies. Zbl. **6**, 274], zu berücksichtigen ist. Der Verf. kommt zum Resultat, daß sich die inkohärente Streustrahlung, soweit sie aus dem erwähnten Atommodell herleitbar ist, als der von den Dichteschwankungen herrührende Streuteil auffassen läßt. Verf. findet die von W. Heisenberg [Physik. Z. **32**, 737 (1931); dies. Zbl. **2**, 433] gefundene Formel für die inkohärente Streustrahlung wieder, mit komplettierenden wesentlich einschränkenden Bedingungen für deren Verwendbarkeit. — Ferner wird das Problem der Existenz elastischer Wellen in einem entarteten Fermigas untersucht und in Analogie zu einer Untersuchung von A. Einstein [Ann. Physik **33**, 1275 (1910)] die Streustrahlung (inkohärente Streuung) der Wirkung solcher elastischer Wellen zugeschrieben. In der diesbezüglichen Diskussion spielt die Tatsache, daß während der in Frage kommenden Schwingungszeiten sich das thermische Gleichgewicht nicht einstellen kann, eine wesentliche Rolle.

Waller (Upsala).

Smith, R. A.: The effect of exchange on the polarisation of electrons by double scattering. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 520—523 (1934).

Das Problem wird nichtrelativistisch behandelt, und es wird angenommen, daß dies für die Schätzung der Größenordnung genügt. Verf. findet, daß der Effekt vom Austausch auf die Streuung bei Energien 75—190 kV nur wenige Prozent der direkten Kernstreuung beträgt, so daß der Effekt zu klein ist, um die Diskrepanz zwischen den Messungen von Dymond [Proc. Roy. Soc. London A **136**, 368 (1932)] und der Theorie von Mott zu beseitigen.

Waller (Upsala).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Watson, W. H.: Discontinuity in electromagnetism. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 28, 1—27 (1934).

This paper is an attempt to introduce into electromagnetic theory the discontinuity that is implied in the existence of the electronic charge e . This is done by relying on the analogy between dynamics and electromagnetic theory, both of which can be made to depend on the theory of differential forms: in the case of dynamics the form is of the first degree, $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n - H dt$, while in the case of electromagnetism the form is of the second degree, $E_x dx dt + E_y dy dt + E_z dz dt$

$+ H_x dy dz + H_y dz dx + H_z dx dy$. In the older quantum-theory, the quantum condition was introduced into dynamics by making the period of the integral of the differential form equal to a multiple of the quantum of Action, h ; similarly now the author proposes to introduce quantum conditions into electrodynamics by considering the integrated differential forms of electromagnetism, which are functions of lines. One of these is multiple-valued in any region containing electric charge, and he associates its modulus of periodicity with the quantum of electric charge e . In the latter part of the paper he considers the motion of lines and their connexion with electromagnetic fields, and the transformation-theory of electromagnetism. *Whittaker*.

Page, Leigh, and N. I. Adams jr.: A proposed reformulation of the electromagnetic equations and revision of units. *J. Franklin Inst.* 218, 517—531 (1934).

Kruse, H., and O. Zinke: Stromverdrängung in geschichteten zylindrischen Leitern. *Hochfrequenztechn. u. Elektroakust.* 44, 195—203 (1934).

Diese Arbeit stellt eine Weiterführung und numerische Entwicklung der Arbeiten von Fischer, Strutt und Ekelöf über obiges Thema dar. Die Verff. behandeln die Sonderfälle starker und geringer Stromverdrängung und lösen für diese Sonderfälle die bekannten Differentialgleichungen des Problems durch asymptotische bzw. aufsteigende Reihenentwicklungen direkt, ohne auf die exakte Lösung durch Besselsche bzw. Hankelsche Funktionen einzugehen. Eine Formelzusammenstellung und Zahlenbeispiele beschließen die sehr nützliche Arbeit.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Davies, R. M., and E. G. James: A study of an electrically-maintained vibrating reed and its application to the determination of Young's modulus. I. Theoretical. *Philos. Mag.*, VII. s. 18, 1023—1052 (1934).

Verff. gehen aus von der Bewegungsgleichung eines mechanischen Punktsystems mit einem Freiheitsgrad und einer äußeren Antriebskraft. Für die Antriebskraft finden sie einen Ausdruck in Form einer Potenzreihe entwickelt nach der Elongation. Hierauf stellen sie in elementarer Weise die Differentialgleichung für den elektrischen Strom im elektrischen Antriebskreise auf. Die zwei simultanen Differentialgleichungen für das elektromechanische System lassen sich in einfacher Weise lösen für kleine Schwingungsamplituden. Die Lösung wird durch Einführung der Begriffe Motional Resistance, Inductance und Impedance veranschaulicht und kurvenmäßig dargestellt. Hierauf wenden sich Verff. dem Fall endlicher Schwingungsamplituden zu und erhalten durch sukzessive Näherung einen einfachen Ausdruck für die Schwingungsfrequenz als Funktion der Schwingungsamplitude. Auch in diesem Fall werden obengenannte Begriffe formuliert und zur Veranschaulichung der Ergebnisse benutzt. In einem letzten Abschnitt gehen Verff. auf die Erweiterung ein, welche die Theorie erfahren muß, wenn die Hysterese und die Wirbelströme in Betracht gezogen werden. Dieser Abschnitt beschränkt sich durchaus auf den Fall kleiner Schwingungsamplituden. Die Lösung führt zu Korrekturen der Schwingungsfrequenz gegenüber dem zuerst behandelten Fall. Auch hier erweisen sich wieder die obengenannten Begriffe als nützlich zur Veranschaulichung der Rechenergebnisse. Die Theorie ist in ihrem Aufbau sehr ähnlich der bereits früher von H. Poincaré und A. E. Kennelly (Electrical vibration instruments) ausgearbeiteten Theorie des elektromagnetischen Telephons.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

James, E. G., and R. M. Davies: A study of an electrically-maintained vibrating reed and its application to the determination of Young's modulus. II. Experimental. *Philos. Mag.*, VII. s. 18, 1053—1086 (1934).

Hara, Gennosuke: Strahlungsleistung und Stromverteilung einer geraden Antenne. *Hochfrequenztechn. u. Elektroakust.* 44, 185—193 (1934).

Verf. betrachtet die Einwirkung einer ebenen elektromagnetischen Welle auf einen geraden Leiter endlicher Länge, bei dem ein wesentlicher Teil des Energieverlustes durch Abstrahlung verbraucht wird. Er setzt sich zunächst zur Aufgabe, die Stromverteilung in einer solchen Empfangsantenne zu ermitteln. Er nimmt dazu an, daß

die Stromverteilung symmetrisch bzw. antisymmetrisch in bezug auf die Antennenmitte ist, und zerlegt den Gesamtstrom in eine Grundkomponente nebst Oberwellen. Zur Ermittlung der verschiedenen Oberwellenkomponenten dient die Bedingung, daß die von der eintreffenden Welle gelieferte Speiseleistung gleich der Strahlungsleistung der Oberwelle unter Berücksichtigung der gegenseitigen Leistung gegen alle anderen Oberwellen ist. Man kommt so zu einem System von linearen Gleichungen für die Größe der Oberwellenkomponenten. Dieses System von linearen Gleichungen wird gelöst für den Fall, daß 1. nur die Grundwelle, 2. die Grundwelle und die dritte Oberwelle, 3. die Grundwelle, die dritte und die fünfte Oberwelle vorhanden sind. Die Lösungen werden in diesen Fällen numerisch verfolgt. Hierauf betrachtet Verf. das analoge Problem für eine einfache Sendeantenne, wobei die Speisung durch eine in der Antennenmitte wirksame elektromotorische Kraft stattfindet. Auch für dieses Problem werden in den obengenannten Fällen Näherungslösungen für die Stromverteilung ausgearbeitet und numerisch angegeben. — Endlich untersucht der Verf. mit Hilfe der eben ermittelten Stromverteilungen die Strahlungsleistung und den Strahlungswiderstand von Linearantennen und stellt hierfür Formeln und Kurven auf. In einem letzten Abschnitt werden eine Reihe von Experimenten erwähnt, die eine ausreichende Bestätigung der aufgestellten Formeln ergeben, wobei allerdings der Einfluß des Erdbodens in einigen Fällen nicht unerhebliche Abweichungen vom theoretischen Rechenergebnis verursacht, wie auch zu erwarten war. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Bergmann, L., und L. Krügel: Messungen im Strahlungsfeld einer im Innern eines metallischen Hohlzylinders erregten Linearantenne. *Ann. Physik*, V. F. **21**, 113—138 (1934).

Verff. geben zunächst einen Überblick der Formeln R. Weyrichs für das elektromagnetische Feld eines Hertzschen Dipoles in einem unendlich langen Hohlzylinder aus vollkommen leitendem Material. Aus der Weyrichschen Formel für das Hertzsche Vektorpotential leiten Verff. in bekannter Weise durch Differentiation Ausdrücke für den Absolutwert der elektrischen und der magnetischen Feldstärke ab. Sodann berechnen sie durch einfache Integration über die Länge einer in der Achse des metallischen Hohlzylinders befindlichen Linearantenne Formeln für das Hertzsche Vektorpotential einer solchen Antenne. Diese Formeln enthalten Reihen, deren Glieder aus Besselschen bzw. Hankelschen Funktionen bestehen. Aus dem Vektorpotential finden sie dann wieder durch Differentiation Ausdrücke für die Absolutwerte der elektrischen und magnetischen Feldstärken. Sodann gehen Verff. mit ihrer bekannten sauberen Experimentierkunst daran, diese Formeln nachzuprüfen, und finden genügende Übereinstimmung.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Sartori, Giuseppe: I conduttori a impedenza variabile col cambiamento della frequenza. *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna*, VIII. s. **10**, 49—57 (1933).

Schelkunoff, S. A.: The electromagnetic theory of coaxial transmission lines and cylindrical shields. *Bell Syst. Techn. J.* **13**, 532—579 (1934).

Elementare Anwendungen der Maxwell'schen Gleichungen auf einige elektrotechnische Probleme mit axialer Symmetrie. Die Resultate werden mit den Ergebnissen der approximativen Theorie der elektrischen Kreisströme verglichen. *V. Fock*.

Llewellyn, F. H.: Special cases of the mutual inductance between circles, with some practical applications. *Proc. Phys. Soc., London* **46**, 824—840 (1934).

Verf. betrachtet zunächst die bekannte nach Kugelfunktionen fortschreitende Formel für die gegenseitige Induktion zweier Koaxialer gleich großer Stromkreise. Diese Formel bringt er in eine für die numerische Auswertung sehr geeignete Form. Nach Betrachtung einiger Spezialfälle geht er dann dazu über, die gegenseitige Induktion zwischen zwei Spulen und einem Solenoid zu berechnen. Eine Reihe von Messungen bestätigt die Rechenergebnisse.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Dahr, Konstantin: Beitrag zur allgemeinen Theorie der Vierpole und Kettenleiter. *Ann. Physik*, V. F. **21**, 182—212 (1934).